CAPITULO 6

Teoría elemental de probabilidades

*DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

Definición clásica

Supongamos que un suceso E tiene h posibilidades de ocurrir entre un total de n posibilidades, cada una de las cuales tiene la misma oportunidad de ocurrir que las demás. Entonces, la probabilidad de que ocurra E (o sea un *éxito*) se denota por

$$p = \Pr\{E\} = \frac{h}{n}$$

La probabilidad de que no ocurra E (o sea, un *fracaso*) se denota por

$$q = \Pr\{\text{no } E\} = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - p = 1 - \Pr\{E\}$$

Así pues, $p + q = 1$, es decir, $\Pr\{E\} + \Pr\{\text{no } E\} = 1$. El suceso «no E» se denotará por $\bar{E}$, $\tilde{E}$ o $\sim E$.

EJEMPLO 1. Sea E el suceso de que al tirar un dado una vez salga un 3 o un 4. Hay seis formas de caer el dado, dando 1, 2, 3, 4, 5 ó 6; y si el dado es bueno (no trucado), como se supondrá en todo lo que sigue salvo mención explícita, podemos suponer que las seis tienen la misma oportunidad de salir. Como E puede ocurrir de dos formas, tenemos $p = \Pr\{E\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

La probabilidad de que no salga ni 3 ni 4 (o sea, de que salga 1, 2, 5 ó 6) es $q = \Pr\{\bar{E}\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Nótese que la probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1. Si un suceso es imposible, su probabilidad es 0. Si un suceso debe ocurrir necesariamente (suceso seguro) su probabilidad es 1.

Si p es la probabilidad de que ocurra un suceso, las *apuestas* a su favor están $p:q$ (léase «p a q»). Luego las apuestas en su contra están $q:p$. Así, las apuestas contra la aparición de un 3 o un 4 al lanzar un dado bueno son $q:p = \frac{2}{3}:\frac{1}{3} = 2:1$ (o sea, 2 a 1).

Definición como frecuencia relativa

La definición clásica de probabilidad tiene la pega de que las palabras «misma oportunidad» aparecen como sinónimas de «equiprobables», lo cual produce un círculo vicioso. Por ello, algunos defienden una definición estadística de la probabilidad. Para ellos, la probabilidad estimada, o *probabilidad empírica*, de un suceso se toma como la *frecuencia relativa* de ocurrencia del suceso cuando el número de observaciones es muy grande. La probabilidad misma es el *límite* de esa frecuencia relativa cuando el número de observaciones crece indefinidamente.

EJEMPLO 2. Si en 1000 tiradas de una moneda salen 529 caras, la frecuencia relativa de caras es $529/1000 = 0.529$. Si en otros 1000 lanzamientos salen 493 caras, la frecuencia relativa en el total de 2000 tiradas es $(529 + 493)/2000 = 0.511$. De acuerdo con la definición estadística, continuando de este modo nos iremos acercando más y más a un número que representa la probabilidad de que salga cara en una sola tirada. De los resultados presentados, éste sería 0.5, con un dígito significativo. Para obtener más dígitos habría que hacer más tiradas.

La definición estadística, si bien útil en la práctica, tiene una desventaja matemática en el hecho de que un límite puede no existir. Por esa razón, la moderna teoría de la probabilidad es *axiomática* y deja el concepto de probabilidad sin definir, al igual que sucede en geometría con el punto y la recta.

PROBABILIDAD CONDICIONAL; SUCESOS INDEPENDIENTES Y SUCESOS DEPENDIENTES

Si E_1 y E_2 son dos sucesos, la probabilidad de que E_2 ocurra dado que haya ocurrido E_1 se denota por $\Pr\{E_2 \mid E_1\}$, o $\Pr\{E_2 \text{ dado } E_1\}$, y se llama la *probabilidad condicional* de E_2 dado E_1.

Si la ocurrencia o no de E_1 no afecta para nada la probabilidad de ocurrencia de E_2, entonces $\Pr\{E_2 \mid E_1\} = \Pr\{E_2\}$, y diremos que E_1 y E_2 son *sucesos independientes;* en caso contrario, se dirá que son *sucesos dependientes*.

Si denotamos por E_1E_2 el suceso de que «ambos E_1 y E_2 ocurran», llamado un suceso compuesto, entonces

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2 \mid E_1\} \tag{1}$$

En particular,

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} \quad \text{para sucesos independientes} \tag{2}$$

Para tres sucesos E_1, E_2 y E_3, tenemos

$$\Pr\{E_1E_2E_3\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2 \mid E_1\}\Pr\{E_3 \mid E_1E_2\} \tag{3}$$

Esto es, la probabilidad de que ocurran E_1, E_2 y E_3 es igual a (la probabilidad de E_1) $\times$ (la probabilidad de E_2 dado E_1) $\times$ (la probabilidad de E_3 dados E_1 y E_2). En particular,

$$\Pr\{E_1E_2E_3\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\}\Pr\{E_3\} \quad \text{para sucesos independientes} \tag{4}$$

En general, si $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ son n sucesos independientes con probabilidades respectivas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, entonces la probabilidad de que ocurran E_1 y E_2 y E_3 y $\cdots$ E_n es $p_1p_2p_3 \cdots p_n$.

EJEMPLO 3. Sean E_1 y E_2 los sucesos «cara en el quinto lanzamiento» y «cara en el sexto lanzamiento» de una moneda, respectivamente. Entonces, E_1 y E_2 son sucesos independientes y, por tanto, la probabilidad de que salga cara en ambos intentos (supuesta la moneda no trucada, aquí y en lo que sigue) es

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

EJEMPLO 4. Si las probabilidades de A y B de estar vivos dentro de 20 años son 0.7 y 0.5, respectivamente, entonces la probabilidad de que ambos lo estén es $(0.7)(0.5) = 0.35$.

EJEMPLO 5. Una caja contiene 3 bolas blancas y 2 bolas negras. Sea E_1 el suceso «la primera bola extraída es negra» y E_2 el suceso «la segunda bola extraída es negra». Las bolas extraídas no se devuelven a la caja. E_1 y E_2 son sucesos dependientes.

La probabilidad de que la primera bola sea negra es $\Pr\{E_1\} = 2/(3+2) = \frac{2}{5}$. La probabilidad de que la segunda sea negra, dado que ya lo haya sido la primera, es $\Pr\{E_2 \mid E_1\} = 1/(3+1) = \frac{1}{4}$. Luego la probabilidad de que ambas sean negras es

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2 \mid E_1\} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Dos o más sucesos se llaman sucesos *mutuamente excluyentes* si la ocurrencia de cualquiera de ellos excluye la de los otros. De modo que si E_1 y E_2 son sucesos mutuamente excluyentes, entonces $\Pr\{E_1E_2\} = 0$.

Si $E_1 + E_2$ denota el suceso de que «ocurra E_1 o bien E_2 o ambos a la vez», entonces

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1E_2\} \tag{5}$$

En particular,

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} \quad \text{para sucesos mutuamente excluyentes} \tag{6}$$

Como extensión de esto, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son n sucesos mutuamente excluyentes con probabilidades respectivas E_1 o E_2 o $\cdots$ E_n es $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

El resultado (5) se puede generalizar a tres o más sucesos mutuamente excluyentes (véase Problema 6.38).

EJEMPLO 6. Sean E_1 el suceso «sacar un as de una baraja» y E_2 «sacar un rey». Entonces $\Pr\{E_1\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ y $\Pr\{E_2\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. La probabilidad de sacar o un as o un rey en un solo ensayo es

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

pues no es posible sacar ambos a la vez, y son, por tanto, sucesos mutuamente excluyentes.

EJEMPLO 7. Sean E_1 el suceso «sacar un as» de una baraja y E_2 «sacar una espada». Entonces E_1 y E_2 no son sucesos mutuamente excluyentes, porque puede sacarse el as de espadas. Luego la probabilidad de sacar un as o una espada o ambos es

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1E_2\} = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Discretas

Si una variable X puede tomar un conjunto discreto de valores $X_1, X_2, \ldots, X_K$, con probabilidades respectivas $p_1, p_2, \ldots, p_K$, donde $p_1 + p_2 + \cdots + p_K = 1$, decimos que tenemos definida una *distribución de probabilidad discreta* para X. La función $p(X)$, que tiene valores $p_1, p_2, \ldots, p_K$ para $X = X_1, X_2, \ldots, X_K$, se llama *función de probabilidad* o una *función de frecuencia* de X. Como X puede tomar ciertos valores con ciertas probabilidades, se le llama una *variable aleatoria discreta*. Una variable aleatoria se conoce también como *variable estocástica*.

EJEMPLO 8. Sea X la suma de puntos obtenida al lanzar dos dados. La distribución de probabilidad se muestra en la Tabla 6.1. Por ejemplo, la probabilidad de obtener suma 5 es $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; así que en 900 tiradas se esperan 100 tiradas con suma 5.

Tabla 6.1

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Nótese que esto es análogo a una distribución de frecuencias relativa, con probabilidad en lugar de frecuencia relativa. De manera que podemos pensar en las distribuciones de probabilidad como formas teóricas o ideales en el límite, de distribuciones de frecuencia relativa cuando el número de observaciones es muy grande. Por eso podemos pensar en las distribuciones de probabilidad como si fueran distribuciones de *poblaciones*, mientras que las distribuciones de frecuencia relativa son distribuciones de *muestras* de esa población.

La distribución de probabilidad se puede representar gráficamente dibujando $p(X)$ versus X, igual que para las distribuciones de frecuencia relativa (véase Prob. 6.11).

Acumulando probabilidades, obtenemos *distribuciones de probabilidad acumulada*, análogas a las distribuciones de frecuencia relativa acumulada. La función asociada con esa distribución se llama una *función de distribución*.

Continuas

Las ideas anteriores se extienden a variables X que pueden tomar un conjunto continuo de valores. El polígono de frecuencias relativas de una muestra se convierte, en el caso teórico o límite de una población, en una curva continua (como la de la Fig. 6.1) de ecuación $Y = p(X)$. El área total bajo esa curva y sobre el eje X es 1, y el área entre $X = a$ y $X = b$ (sombreada en la figura) da la probabilidad de que X esté entre a y b, que se denota por $\Pr\{a < X < b\}$.

Llamamos a $p(x)$ una *función densidad de probabilidad*, o brevemente una *función densidad*, y cuando tal función es dada decimos que se ha definido una *distribución de probabilidad continua* para X. La variable X se llama entonces una *variable aleatoria continua*.

Como en el caso discreto, podemos definir distribuciones de probabilidad acumulada y las asociadas funciones de distribución.

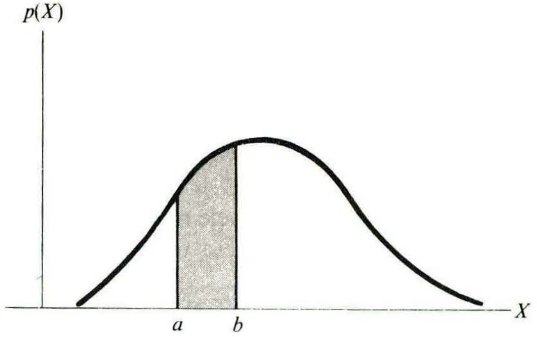

Figura 6.1.

✱ESPERANZA MATEMATICA

Si p es la probabilidad de que una persona reciba una cantidad S de dinero, la *esperanza matemática* (o simplemente *esperanza*) se define como pS.

EJEMPLO 9. Si la probabilidad de que un hombre gane un premio de \$10 es 1/5, su esperanza matemática es $\frac{1}{5}(\$10) = \$2$.

El concepto de esperanza matemática se extiende fácilmente. Si X denota una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $X_1, X_2, ..., X_K$ con probabilidades $p_1, p_2, ..., p_K$, donde $p_1 + p_2 + + \cdots + p_K = 1$, la *esperanza matemática* de X (o simplemente *esperanza* de X), denotada $E(X)$, y se define como

$$E(X) = p_1X_1 + p_2X_2 + \cdots + p_KX_K = \sum_{j=1}^{K} p_jX_j = \sum pX \tag{7}$$

Si las probabilidades p_j en esa expresión se sustituyen por las frecuencias relativas f_j/N, donde $N = \sum f_j$, la esperanza matemática se reduce a $(\sum fX)/N$, que es la media aritmética $\bar{X}$ de una muestra de tamaño N en la que $X_1, X_2, ..., X_K$ aparecen con estas frecuencias relativas. Al crecer N más y más, las frecuencias relativas se acercan a las probabilidades p_j. Así que nos vemos abocados a interpretar $E(X)$ como la media de la población cuyo muestreo se consideraba. Si llamamos m a la media muestral, podemos denotar la media poblacional por la correspondiente letra griega μ (mu).

Puede definirse, asimismo, la esperanza matemática para variables aleatorias continuas, pero requiere el cálculo.

RELACION ENTRE POBLACION, MEDIA MUESTRAL Y VARIANZA

Si seleccionamos una muestra de tamaño N al azar de una población (o sea, suponemos que todas las posibles muestras son igualmente probables), entonces es posible mostrar que *el valor esperado de la media muestral m es la media poblacional μ.*

No se deduce, sin embargo, que el valor esperado de cualquier cantidad calculada sobre una muestra sea la cantidad correspondiente de la población. Así, el valor esperado de la varianza muestral, como la hemos definido, no es la varianza de la población, sino $(N - 1)/N$ veces dicha varianza. Por eso algunos estadísticos prefieren definir la varianza muestral como nuestra varianza multiplicada por $N/(N - 1)$.

ANALISIS COMBINATORIO

Al hallar probabilidades de sucesos complicados, suele resultar difícil y tediosa una enumeración de los casos. El análisis combinatorio facilita mucho esa tarea.

Principio fundamental

Si un suceso puede ocurrir de n_1 maneras, y si cuando éste ha ocurrido otro suceso puede ocurrir de n_2 maneras, entonces el número de maneras en que ambos pueden ocurrir en el orden especificado es $n_1 n_2$.

EJEMPLO 10. Si hay 3 candidatos para gobernador y 5 para alcalde, los dos cargos pueden ocuparse de $3 \cdot 5 = 15$ formas.

Factorial de n

La factorial de n, denotada por $n!$, se define como

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 1 \tag{8}$$

Así, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, y $4!3! = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(3 \cdot 2 \cdot 1) = 144$. Conviene definir $0! = 1$.

Permutaciones

Una permutación de n objetos tomados de r en r es una *elección ordenada* de r objetos de entre n. El número de permutaciones de n objetos tomados de r en r se denota por ${}_nP_r$, $P(n, r)$, o $P_{n,r}$ y viene dado por

$${}_nP_r = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!} \tag{9}$$

En particular, el número de permutaciones de n objetos tomados de n en n es

$${}^n_nP = n(n - 1)(n - 2) \cdots 1 = n!$$

EJEMPLO 11. El números de permutaciones que se pueden dar de las letras a, b y c tomadas de dos en dos es ${}_3P_2 = 3 \cdot 2 = 6$. Son ab, ba, ac, ca, bc y cb.

El número de permutaciones de n objetos, de los que n_1 son iguales, n_2 son iguales, ... es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots} \quad \text{donde } n = n_1 + n_2 + \cdots \tag{10}$$

EJEMPLO 12. El número de permutaciones de las letras de la palabra «statistics» es

$$\frac{10!}{3!3!1!2!1!} = 50{,}400$$

porque hay 3 eses, 3 tes, 1 a, 2 ies y 1 c.

COMBINACIONES

Una combinación de n objetos tomados de r en r es una selección de r de ellos, sin importar el orden de los r escogidos. El número de combinaciones de n objetos, tomados de r en r se denota por $\binom{n}{r}$ y viene dado por

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{11}$$

EJEMPLO 13. El número de combinaciones de las letras a, b y c tomadas de dos en dos es

$$\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$$

Son ab, ac y bc. Nótese que ab es la misma combinación que ba, pero no la misma permutación.

APROXIMACION DE STIRLING A $n!$

Cuando n es grande, la evaluación directa de $n!$ es horrible. En tal caso, se usa una fórmula aproximada debida a James Stirling:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \tag{12}$$

donde $e = 2.71828 \cdots$ es la base natural de logaritmos (véase Prob. 6.31).

RELACION DE LA PROBABILIDAD CON LA TEORIA DE CONJUNTOS

En la moderna teoría de probabilidad, se piensa en los posibles resultados de un ensayo, experimento, etc., como puntos de un espacio (que puede ser de 1, 2, 3, ..., dimensiones), llamado *espacio muestral* S. Si S contiene sólo un número finito de puntos, a cada punto está asociado un número no negativo, llamado *probabilidad*, tal que la suma de todos ellos es 1. Un suceso es un *conjunto* (o *colección*) de puntos de S, tal como E_1 o E_2 en la Figura 6.2; esa figura se llama un *diagrama de Euler* o de *Venn*.

El suceso $E_1 + E_2$ es el conjunto de puntos que *están en* E_1 *o en* E_2 *o en ambos*, y el suceso E_1E_2 es el conjunto de puntos *comunes a* E_1 *y a* E_2. Así que la probabilidad de un suceso tal como E_1 es la suma de las probabilidades asociadas a todos sus puntos. Análogamente, la probabilidad de $E_1 + E_2$, denotada $\Pr\{E_1 + E_2\}$, es la suma de las probabilidades asociadas a todos los puntos

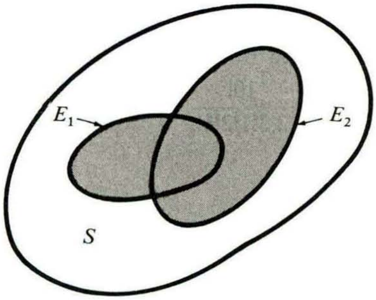

Figura 6.2.

contenidos en el conjunto $E_1 + E_2$. Si E_1 y E_2 no tienen puntos en común (o sea, si son sucesos mutuamente excluyentes), entonces $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$. Si tienen puntos en común, entonces $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1E_2\}$.

El conjunto $E_1 + E_2$ se denota a veces por $E_1 \cup E_2$ y se llama conjunto *unión* de los dos conjuntos. El conjunto E_1E_2 se suele denotar $E_1 \cap E_2$ y se llama *intersección* de los dos conjuntos. Cabe extender eso a más de dos conjuntos; así, en vez de $E_1 + E_2 + E_3$ y $E_1E_2E_3$, podríamos usar las notaciones $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ y $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, respectivamente.

El símbolo ϕ (letra griega *phi*) se usa para denotar el *conjunto vacío*, que no contiene punto alguno. La probabilidad asociada con un suceso correspondiente a este conjunto es cero (o sea, $\Pr\{\phi\} = 0$). Si E_1 y E_2 no tienen puntos en común, podemos escribir $E_1E_2 = \phi$, que significa que los correspondientes sucesos son sucesos mutuamente excluyentes, de donde $\Pr\{E_1E_2\} = 0$.

Con este enfoque moderno, una variable aleatoria es una función definida en cada punto del espacio muestral. Por ejemplo, en el Problema 6.36 la variable aleatoria es la suma de las coordenadas de cada punto.

En el caso de que S tenga infinitos puntos, lo anterior se extiende usando nociones del Cálculo.

PROBLEMAS RESUELTOS

REGLAS FUNDAMENTALES DE LA PROBABILIDAD

6.1. Determinar, o estimar, la probabilidad p de los siguientes sucesos:

(*a*) Una tirada de un dado resulte impar.
(*b*) Al menos una cara en dos tiradas de una moneda.
(*c*) Un as, el 10 de diamantes o el 2 de picas aparezca al sacar una sola carta de una baraja francesa de 52 naipes.
(*d*) La suma de dos dados sea 7.
(*e*) Que aparezca una cruz en la próxima tirada de una moneda si han salido 56 caras de 100 tiradas previas.

Solución

(*a*) De los 6 casos equiprobables, tres (si salen 1, 3 ó 5) son favorables al suceso. Luego $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
(*b*) Si H denota cara y T cruz, pueden salir HH, HT, TH y TT, con igual probabilidad. Sólo los tres primeros son favorables, luego $p = \frac{3}{4}$.

(*c*) El suceso puede ocurrir de 6 maneras (los 4 ases, el 10 de diamantes y el 2 de picas) de los 52 casos posibles. Luego $p = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$.

(*d*) Emparejando de todos los modos posibles las puntuaciones de los dos dados, hay $6 \cdot 6 = 36$ posibles casos. Pueden denotarse (1, 1), (2, 1), (3, 1), ..., (6, 6).

Las seis formas de que sumen 7 son (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) y (6, 1) [véase Prob. 6.37(*a*)]. Luego $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(*e*) Como salieron $100 - 56 = 44$ cruces en 100 tiradas, la probabilidad estimada (o empírica) de una cruz es la frecuencia relativa $44/100 = 0.44$.

6.2. Un experimento consiste en tirar un dado y una moneda. Si E_1 es el suceso «cara» al tirar la moneda, y E_2 es el suceso «3 ó 6» al tirar el dado, enunciar en palabras el significado de:

(*a*) $\bar{E}_1$	(*c*) E_1E_2	(*e*) $\Pr\{E_1 \mid E_2\}$
(*b*) $\bar{E}_2$	(*d*) $\Pr\{E_1\bar{E}_2\}$	(*f*) $\Pr\{\bar{E}_1 + \bar{E}_2\}$

Solución

(*a*) Cruz en la moneda y cualquier cosa en el dado.
(*b*) 1, 2, 4 ó 5 en el dado y cualquier cosa en la moneda.
(*c*) Cara en la moneda y 3 ó 6 en el dado.
(*d*) La probabilidad de cara en la moneda y 1, 2, 4 ó 5 en el dado.
(*e*) La probabilidad de cara en la moneda, dado que en el dado sale 3 ó 6.
(*f*) La probabilidad de cruz en la moneda o 1, 2, 4 ó 5 en el dado, o ambos.

6.3. Se saca al azar una bola de una caja que contiene 6 bolas rojas, 4 blancas y 5 azules. Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea: (*a*) roja, (*b*) blanca, (*c*) azul, (*d*) no roja y (*e*) roja o blanca.

Solución

Denotemos R, W y B los sucesos de sacar una bola roja, blanca y azul, respectivamente. Entonces:

(*a*)
$$\Pr\{R\} = \frac{\text{formas de coger una bola roja}}{\text{formas totales de coger una bola}} = \frac{6}{6+4+5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(*b*)
$$\Pr\{W\} = \frac{4}{6+4+5} = \frac{4}{15}$$

(*c*)
$$\Pr\{B\} = \frac{5}{6+4+5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(*d*)
$$\Pr\{\bar{R}\} = 1 - \Pr\{R\} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad \text{por la parte } (a)$$

(*e*)
$$\Pr\{R + W\} = \frac{\text{formas de coger una bola roja o una blanca}}{\text{formas totales de coger una bola}} = \frac{6+4}{6+4+5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Otro método

$$\Pr\{R + W\} = \Pr\{\bar{B}\} = 1 - \Pr\{B\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{por la parte } (c)$$

Nótese que $\Pr\{R + W\} = \Pr\{R\} + \Pr\{W\}$ (es decir, $\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{4}{15}$). Esto ilustra la regla general $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$ válida para sucesos mutuamente excluyentes E_1 y E_2.

6.4. Un dado se lanza dos veces. Hallar la probabilidad de obtener 4, 5 ó 6 en la primera tirada y 1, 2, 3 ó 4 en la segunda.

Solución

Sea E_1 = suceso «4, 5 ó 6» en la primera tirada, y E_2 = suceso «1, 2, 3 ó 4» en la segunda. Los diversos resultados de las dos tiradas se emparejan de $6 \times 6 = 36$ formas posibles, todas equiprobables. Las tres formas de salir el resultado apetecido en la primera y las cuatro de la segunda se emparejan de $3 \times 4 = 12$ formas, los casos favorables en que E_1 y E_2 ocurren ambos, es decir E_1E_2. Luego $\Pr\{E_1E_2\} = 12/36 = 1/3$.

Notemos que $\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\ \Pr\{E_2\}$ (es decir, $\frac{1}{3} = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6}$) es válida para los *sucesos independientes* E_1 y E_2.

6.5. De una baraja de 52 naipes, mezclados al azar, se sacan dos naipes. Hallar la probabilidad de que ambos sean ases si la primera extraída: (*a*) se devuelve a la baraja y (*b*) si no se devuelve.

Solución

Sea E_1 = suceso «as» en la primera extracción, y E_2 = suceso «as» en la segunda.

(*a*) Si se repone, E_1 y E_2 son sucesos independientes. Así pues, $\Pr\{\text{ambas sean ases}\} = \Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\ \Pr\{E_2\} = (\frac{4}{52})(\frac{4}{52}) = \frac{1}{169}$.

(*b*) Si no se repone, la primera carta se saca de entre 52 y la segunda de entre 51, luego ambas pueden sacarse de 52×51 formas, todas equiprobables.

Hay 4 casos favorables a E_1 y 3 a E_2, de modo que ambos, E_1 y E_2, o sea E_1E_2, pueden ocurrir de 4×3 formas. Luego $\Pr\{E_1E_2\} = (4 \cdot 3)/(52 \cdot 51) = \frac{1}{221}$.

Nótese que $\Pr\{E_2 \mid E_1\} = \Pr\{\text{la segunda es un as dado que la primera era un as}\} = \frac{3}{51}$. Por tanto, nuestro resultado ilustra la regla general de que $\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\ \Pr\{E_2 \mid E_1\}$ cuando E_1 y E_2 son sucesos dependientes.

6.6. Se sacan sucesivamente 3 bolas de la caja del Problema 6.3. Hallar la probabilidad de que salgan en el orden roja, blanca, azul si cada bola: (*a*) se repone y (*b*) no se repone.

Solución

Sea R = suceso «roja» en la primera extracción, W = suceso «blanca» en la segunda y B = suceso «azul» en la tercera. Se pide $\Pr\{RWB\}$.

(*a*) Con reposición, R, W y B son sucesos independientes, luego

$$\Pr\{RWB\} = \Pr\{R\}\ \Pr\{W\}\ \Pr\{B\} = \left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{6+4+5}\right)\left(\frac{5}{6+4+5}\right) = \left(\frac{6}{15}\right)\left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{5}{15}\right) = \frac{8}{225}$$

(*b*) Sin reposición, R, W y B son sucesos dependientes y

$$\Pr\{RWB\} = \Pr\{R\}\ \Pr\{W \mid R\}\ \Pr\{B \mid WR\} = \left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{5+4+5}\right)\left(\frac{5}{5+3+5}\right)$$

$$= \left(\frac{6}{15}\right)\left(\frac{4}{14}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{4}{91}$$

donde $\Pr\{B \mid WR\}$ es la probabilidad condicional de sacar una azul si ya han salido una blanca y una roja.

6.7. Hallar la probabilidad de que salga al menos un 4 en dos tiradas de un dado.

Solución

Sea E_1 = suceso «4» en la primera tirada, E_2 = suceso «4» en la segunda y $E_1 + E_2$ = suceso «4» en la primera o «4» en la segunda o en ambas = suceso de que salga al menos un 4. Se pide $\Pr\{E_1 + E_2\}$.

Primer método

El número de formas en que pueden salir los dos dados es $6 \times 6 = 36$. Además,

Número de formas de que salga E_1 pero no $E_2 = 5$
Número de formas de que salga E_2 pero no $E_1 = 5$
Número de formas de que salgan ambos E_1 y $E_2 = 1$

Luego el número de formas en que al menos uno de ellos sale es $5 + 5 + 1 = 11$ y, por tanto, $\Pr\{E_1 + E_2\} = \frac{11}{36}$.

Segundo método

Como E_1 y E_2 no son sucesos mutuamente excluyentes, $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1E_2\}$. Además, como E_1 y E_2 son sucesos independientes, $\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\}$. Entonces $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - (\frac{1}{6})(\frac{1}{6}) = \frac{11}{36}$.

Tercer método

$$\Pr\{\text{salir al menos un } 4\} + \Pr\{\text{no salga ningún } 4\} = 1$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\Pr\{\text{al menos un } 4\} &= 1 - \Pr\{\text{ningún } 4\} \\
&= 1 - \Pr\{\text{ni 4 en la primera ni 4 en la segunda}\} \\
&= 1 - \Pr\{\bar{E}_1\bar{E}_2\} = 1 - \Pr\{\bar{E}_1\}\Pr\{\bar{E}_2\} \\
&= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{11}{36}
\end{aligned}$$

6.8. Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 2 bolas negras; otra contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Si se saca una bola de cada bolsa, hallar la probabilidad de que: (*a*) ambas sean blancas, (*b*) ambas sean negras y (*c*) una sea blanca y la otra negra.

Solución

Sea W_1 = suceso «bola blanca» de la primera bolsa y W_2 = suceso «bola blanca» de la segunda.

(*a*)

$$\Pr\{W_1W_2\} = \Pr\{W_1\}\Pr\{W_2\} = \left(\frac{4}{4+2}\right)\left(\frac{3}{3+5}\right) = \frac{1}{4}$$

(*b*)

$$\Pr\{\bar{W}_1\bar{W}_2\} = \Pr\{\bar{W}_1\}\Pr\{\bar{W}_2\} = \left(\frac{2}{4+2}\right)\left(\frac{5}{3+5}\right) = \frac{5}{24}$$

(*c*) El suceso «una es blanca y la otra negra» es el mismo que «o la primera es blanca, o la segunda es negra o la primera negra y la segunda blanca»; esto es, $W_1 \bar{W}_2 + \bar{W}_1 W_2$. Como $W_1 \bar{W}_2$ y $\bar{W}_1 W_2$ son sucesos mutuamente excluyentes, tenemos

$$\begin{aligned}\Pr\{W_1 \bar{W}_2 + \bar{W}_1 W_2\} &= \Pr\{W_1 \bar{W}_2\} + \Pr\{\bar{W}_1 W_2\} \\ &= \Pr\{W_1\} \Pr\{\bar{W}_2\} + \Pr\{\bar{W}_1\} \Pr\{W_2\} \\ &= \left(\frac{4}{4+2}\right)\left(\frac{5}{3+5}\right) + \left(\frac{2}{4+2}\right)\left(\frac{3}{3+5}\right) = \frac{13}{24}\end{aligned}$$

Otro método

La probabilidad pedida es $1 - \Pr\{W_1 W_2\} - \Pr\{\bar{W}_1 \bar{W}_2\} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{24} = \frac{13}{24}$.

6.9. A y B juegan 12 partidas de ajedrez. A gana 6, B gana 4 y en 2 hacen tablas. Acuerdan jugar un torneo de 3 partidas. Hallar la probabilidad de que: (*a*) A gane las 3, (*b*) hagan tablas en 2, (*c*) A y B ganen alternadamente y (*d*) B gane al menos 1 partida.

Solución

Denotemos por A_1, A_2 y A_3 los sucesos «A gana» en la primera, segunda y tercera partidas, respectivamente; y por B_1, B_2 y B_3 lo análogo para B. Sean T_1, T_2 y T_3 los sucesos «tablas» en las tres partidas sucesivas.

Sobre la base de su experiencia pasada (probabilidad empírica), supondremos que $\Pr\{A$ gana cualquier partida$\} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, que $\Pr\{B$ gana cualquier partida$\} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, y que $\Pr\{$tablas en cualquier partida$\} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

(*a*) $\Pr\{A \text{ gane los 3 juegos}\} = \Pr\{A_1 A_2 A_3\} = \Pr\{A_1\} \Pr\{A_2\} \Pr\{A_3\} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

suponiendo que los resultados de cada partida sean independientes, lo cual parece justificable (a menos que los jugadores se dejen *influir psicológicamente* por las derrotas).

(*b*) $\Pr\{\text{tablas en 2 partidas}\} = \Pr\{1.^a \text{ y } 2.^a \text{ en tablas, o } 1.^a \text{ y } 3.^a \text{ en tablas, o } 2.^a \text{ y } 3.^a \text{ en tablas}\}$

$$\begin{aligned}&= \Pr\{T_1 T_2 \bar{T}_3\} + \Pr\{T_1 \bar{T}_2 T_3\} + \Pr\{\bar{T}_1 T_2 T_3\} \\ &= \Pr\{T_1\} \Pr\{T_2\} \Pr\{\bar{T}_3\} + \Pr\{T_1\} \Pr\{\bar{T}_2\} \Pr\{T_3\} + \Pr\{\bar{T}_1\} \Pr\{T_2\} \Pr\{T_3\} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}\end{aligned}$$

(*c*) $\Pr\{A \text{ y } B \text{ ganan alternadamente}\} = \Pr\{\text{ganan } ABA \text{ o ganan } BAB\}$

$$\begin{aligned}&= \Pr\{A_1 B_2 A_3 + B_1 A_2 B_3\} = \Pr\{A_1 B_2 A_3\} + \Pr\{B_1 A_2 B_3\} \\ &= \Pr\{A_1\} \Pr\{B_2\} \Pr\{A_3\} + \Pr\{B_1\} \Pr\{A_2\} \Pr\{B_2\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{36}\end{aligned}$$

(*d*) $\Pr\{B \text{ gana al menos 1 partida}\} = 1 - \Pr\{B \text{ pierde las tres}\}$

$$\begin{aligned}&= 1 - \Pr\{\bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3\} = 1 - \Pr\{\bar{B}_1\} \Pr\{\bar{B}_2\} \Pr\{\bar{B}_3\} \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{19}{27}\end{aligned}$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

6.10. Hallar la probabilidad de cada reparto en chicos y chicas en familias con 3 hijos, supuesta igual probabilidad para ambos.

Solución

Sea B = suceso «chico» y G = suceso «chica». De acuerdo con la hipótesis de igual probabilidad, $\Pr\{B\} = \Pr\{G\} = \frac{1}{2}$. En familias de 3 hijos, pueden ocurrir los siguientes sucesos mutuamente excluyentes con las probabilidades indicadas:

(*a*) Tres chicos (BBB):

$$\Pr\{BBB\} = \Pr\{B\}\Pr\{B\}\Pr\{B\} = \frac{1}{8}$$

Aquí suponemos que el nacimiento de cada hijo es independiente de los demás nacimientos.

(*b*) Tres chicas (GGG): Como en la parte (*a*) por simetría,

$$\Pr\{GGG\} = \frac{1}{8}$$

(*c*) Dos chicos y una chica ($BBG + BGB + GBB$):

$$\begin{aligned}\Pr\{BBG + BGB + GBB\} &= \Pr\{BBG\} + \Pr\{BGB\} + \Pr\{GBB\} \\ &= \Pr\{B\}\Pr\{B\}\Pr\{G\} + \Pr\{B\}\Pr\{G\}\Pr\{B\} + \Pr\{G\}\Pr\{B\}\Pr\{B\} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

(*d*) Dos chicas y un chico ($GGB + GBG + BGG$): Como en la parte (*c*) o por simetría, la probabilidad es $\frac{3}{8}$.

Si llamamos X a la *variable aleatoria* que indica el número de chicos en cada familia de 3 hijos, su distribución de probabilidad se muestra en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2

Número de chicos X	0	1	2	3
Probabilidad $p(X)$	1/8	3/8	3/8	1/8

6.11. Representar la distribución del Problema 6.10.

Solución

El gráfico puede representarse como en la Figura 6.3 o como en la 6.4. La suma de las áreas de los rectángulos de la Figura 6.4 es 1; en ella, llamada un *histograma de probabilidad*, estamos considerando a X como una variable continua aunque es discreta en verdad, un procedimiento que resulta útil a menudo. La Figura 6.3, por su lado, se usa cuando uno no quiere tratar la variable como continua.

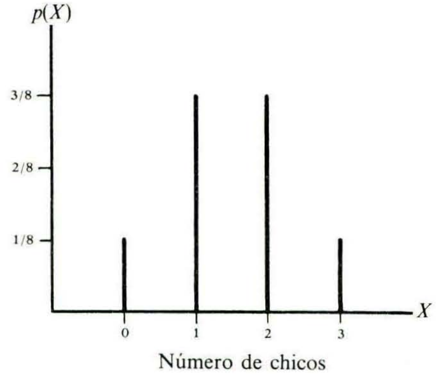

Figura 6.3.

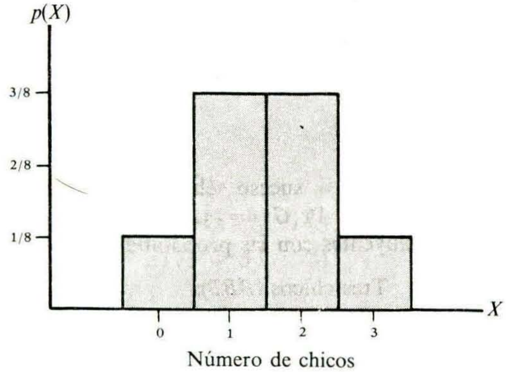

Figura 6.4.

6.12. Una variable aleatoria continua X con valores entre 0 y 4 tiene una función densidad dada por $p(X) = \frac{1}{2} - aX$, donde a es una constante.

(*a*) Calcular a.
(*b*) Hallar $\Pr\{1 < X < 2\}$.

Solución

(*a*) El gráfico de $p(X) = \frac{1}{2} - aX$ es una recta, como muestra la Figura 6.5. Para hallar a, debemos constatar primero que el área total bajo la recta entre $X = 0$ y $X = 4$, y sobre el eje X, ha de ser 1: en $X = 0$, $p(X) = \frac{1}{2}$, y en $X = 4$, $p(X) = \frac{1}{2} - 4a$. Entonces debemos elegir a de modo que el área del trapecio = 1. Area del trapecio = (altura) × (suma de las bases/2 = $\frac{1}{2}(4)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - - 4a) = 2(1 - 4a) = 1$, de donde $(1 - 4a) = \frac{1}{2}$, $4a = \frac{1}{2}$ y $a = \frac{1}{8}$. Luego $(\frac{1}{2} - 4a)$ es realmente igual a cero y, por tanto, la gráfica correcta se muestra en la Figura 6.6.

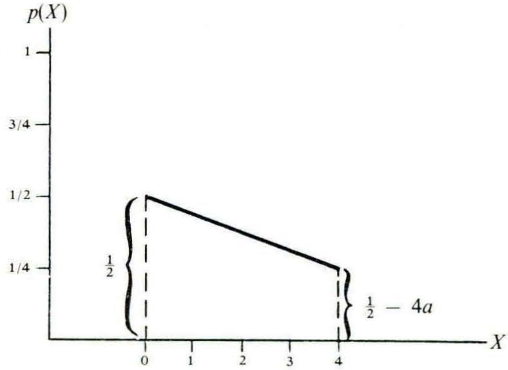

Figura 6.5.

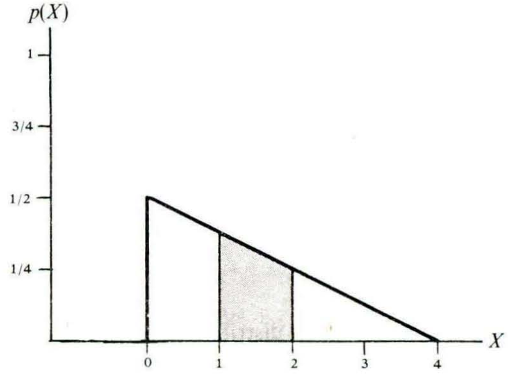

Figura 6.6.

(*b*) La requerida probabilidad es el área entre $X = 1$ y $X = 2$, sombreada en la Figura 6.6. De la parte (*a*), $p(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}X$; así que $p(1) = \frac{3}{8}$ y $p(2) = \frac{1}{4}$ son las ordenadas en $X = 1$ y $X = 2$, respectivamente. El área del trapecio pedida es $\frac{1}{2}(1)(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}) = \frac{5}{16}$, que es la probabilidad deseada.

ESPERANZA MATEMATICA

6.13. Un boleto de una rifa ofrece dos premios, uno de \$5000 y otro de \$2000, con probabilidades 0.001 y 0.003. ¿Cuál sería el precio justo a pagar por él?

Solución

Su esperanza matemática es (\$5000)(0.001) + (\$2000)(0.003) = \$5 + \$6 = \$11, que es el precio justo.

6.14. En un negocio aventurado, una señora puede ganar \$300 con probabilidad 0.6 o perder \$100 con probabilidad 0.4. Hallar su esperanza matemática.

Solución

Su esperanza matemática es (\$300)(0.6) + (−\$100)(0.4) = \$180 − \$40 = \$140.

6.15. Hallar: (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(X^2)$ y (*c*) $E[(X - \bar{X})^2]$ para la distribución de probabilidad que muestra la Tabla 6.3.

Tabla 6.3

X	8	12	16	20	24
$p(X)$	1/8	1/6	3/8	1/4	1/12

Solución

(*a*) $E(X) = \sum Xp(X) = (8)(\frac{1}{8}) + (12)(\frac{1}{6}) + (16)(\frac{3}{8}) + (20)(\frac{1}{4}) + (24)(\frac{1}{12}) = 16$; esto representa la *media* de la distribución.

(*b*) $E(X^2) = \sum X^2p(X) = (8)^2(\frac{1}{8}) + (12)^2(\frac{1}{6}) + (16)^2(\frac{3}{8}) + (20)^2(\frac{1}{4}) + (24)^2(\frac{1}{12}) = 276$; esto representa el segundo momento respecto del origen cero.

(*c*) $E[(X - \bar{X})^2] = \sum (X - \bar{X})^2p(X) = (8 - 16)^2(\frac{1}{8}) + (12 - 16)^2(\frac{1}{6}) + (16 - 16)^2(\frac{3}{8}) + (20 - 16)^2(\frac{1}{4}) + (24 - 16)^2(\frac{1}{12}) = 20$; esto representa la *varianza* de la distribución.

6.16. Una bolsa contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras. Cada una de cuatro personas, A, B, C y D, en ese orden, saca una bola y no la repone. El primero que la saque blanca recibe \$10. Determinar las esperanzas matemáticas de A, B, C y D.

Solución

Como sólo hay 3 bolas blancas, alguien ganará en su primer intento. Sean A, B, C y D los sucesos «A gana», «B gana», «C gana» y «D gana», respectivamente.

$$\Pr\{A \text{ gana}\} = \Pr\{A\} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$$

La esperanza matemática de $A = \frac{2}{5}(\$10) = \$4$.

$$\Pr\{A \text{ pierde y } B \text{ gana}\} = \Pr\{\bar{A}B\} = \Pr\{\bar{A}\}\Pr\{B \mid \bar{A}\} = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{3}{10}$$

Así que la esperanza matemática de B = \$3.

$$\Pr\{A \text{ y } B \text{ pierden y } C \text{ gana}\} = \Pr\{\bar{A}\bar{B}C\} = \Pr\{\bar{A}\}\ \Pr\{\bar{B} \mid \bar{A}\}\ \Pr\{C\bar{A}\bar{B}\} = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5}$$

Luego la esperanza matemática de C = \$2.

$$\Pr\{A,\ B \text{ y } C \text{ pierden y } D \text{ gana}\} = \Pr\{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D\}$$

$$= \quad \Pr\{\bar{A}\} \quad \Pr\{\bar{B} \mid \bar{A}\} \quad \Pr\{\bar{C} \mid \bar{A}\bar{B}\}$$

$\Pr\{D \mid \bar{A}\bar{B}\bar{C}\}$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{10}$$

Y la de D = \$1.

Comprobación: \$4 + \$3 + \$2 + \$1 = \$10 y $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 1$

PERMUTACIONES

6.17. ¿De cuántas maneras se pueden poner en fila 5 fichas de colores distintos?

Solución

Debemos colocarlas en cinco posiciones: — — — — —. La primera posición puede ser ocupada por cualquier ficha (o sea, hay 5 formas de ocupar esa posición). Una vez ocupada ella, hay 4 maneras de ocupar la siguiente, y entonces 3 de ocupar la tercera, 2 de ocupar la cuarta y sólo una de ocupar la quinta y última. En consecuencia:

$$\text{Número de ordenaciones de 5 fichas en fila} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$

En general,

$$\text{Número de ordenaciones de } n \text{ objetos distintos en fila} = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$

Eso se llama el número de *permutaciones* de n objetos distintos tomados de n en n, y se denota por ${}_nP_n$

6.18. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 10 personas en un banco si hay 4 sitios disponibles?

Solución

El primer sitio se puede ocupar de 10 formas, y una vez ocupado, el segundo se puede ocupar de 9 maneras, el tercero de 8 y el cuarto de 7. Por tanto,

$$\text{Número de colocaciones de 10 personas tomadas de 4 en 4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

En general,

$$\text{Número de colocaciones de } n \text{ objetos distintos de } r \text{ en } r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

Esto se llama el número de *permutaciones* de n objetos distintos tomados de n en n y se denota por ${}_nP_r$, $P(n, r)$ o $P_{n,r}$. Nótese que cuando $r = n$, ${}_nP_n = n!$, como en el Problema 6.17.

6.19. Evaluar: (*a*) ${}_8P_3$, (*b*) ${}_6P_4$, (*c*) ${}_{15}P_1$ y ${}_3P_3$.

Solución

(*a*) ${}_8P_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$, (*b*) ${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$, (*c*) ${}_{15}P_1 = 15$ y (*d*) ${}_3P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

6.20. Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

Solución

Los hombres se pueden colocar de ${}_5P_5$ maneras y las mujeres de ${}_4P_4$ maneras; cada colocación de ellos se puede asociar con una de ellas, luego el número pedido es ${}_5P_5 \cdot {}_4P_4 = 5!4! = (120)(24) = 2880$.

6.21. ¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden formar con las cifras 0, 1, 2, 3, ..., 9: (*a*) permitiendo repeticiones, (*b*) sin repeticiones y (*c*) si el último dígito ha de ser cero y no se permiten repeticiones?

Solución

(*a*) El primero de los dígitos puede ser cualquiera de los 9 no nulos (el cero no se permite en esta posición, pues daría lugar a un número de 3 cifras). El segundo, tercero y cuarto dígitos pueden ya ser cualquiera de los 10. Luego se pueden formar $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ números.

(*b*) El primer dígito puede ser cualquiera salvo el 0. El segundo cualquiera de los 9 que quedan al suprimir el ya empleado. El tercero uno de los 8 que aún no se han colocado y el cuarto cualquiera de los 7 no utilizados todavía. Así que se pueden formar $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ números.

Otro método

El primero de los dígitos puede ser elegido entre 9, y los tres restantes de ${}_9P_3$ maneras. Por tanto, hay $9 \cdot {}_9P_3 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ números.

(*c*) El primer dígito se puede elegir de 9 formas, el segundo de 8 y el tercero de 7. Luego se podrán formar $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ números.

Otro método

El primero de los dígitos se puede tomar de 9 maneras y los otros dos de ${}_8P_2$ maneras. Luego $9 \cdot {}_8P_2 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ números se pueden formar.

6.22. Cuatro libros diferentes de matemáticas, 6 de física y 2 de química han de ser colocados en una estantería. ¿Cuántas colocaciones distintas admiten si: (*a*) los libros de cada materia han de estar juntos y (*b*) sólo los de matemáticas tienen que estar juntos?

Solución

(*a*) Los de matemáticas se pueden colocar entre sí de ${}_4P_4 = 4!$ formas, los de física en ${}_6P_6 = 6!$, los de química de ${}_2P_2 = 2!$ y los tres grupos de ${}_3P_3 = 3!$ maneras entre sí. Luego el número requerido es $= 4!6!2!3! = 207{,}360$.

(*b*) Consideremos los 4 de matemáticas como una sola obra. Entonces tenemos 9 libros, que se pueden colocar de ${}_9P_9 = 6!$ maneras. En cada una de ellas, los 4 de matemáticas están juntos. Pero estos 4 se pueden colocar entre sí de ${}_4P_4 = 4!$ maneras. Luego la solución es $9!4! = 8{,}709{,}120$.

6.23. Cinco fichas rojas, 2 blancas y 3 azules se colocan en fila. Las de un color no son distinguibles entre sí. ¿Cuántas colocaciones distintas son posibles?

Solución

Sea P el número de colocaciones. Multiplicando P por el número de colocaciones de: (*a*) las 5 rojas entre sí, (*b*) las 2 blancas entre sí y (*c*) las 3 azules entre sí (o sea, multiplicando por P es 5!2!3!), obtendremos el número de colocaciones de 10 fichas distinguibles (o sea 10!). Luego

$$(5!2!3!)P = 10! \quad \text{y} \quad P = \frac{10!}{5!2!3!}$$

En general, el número de colocaciones diferentes de n objetos, de los que n_1 son iguales, n_2 son iguales, ..., n_k son iguales, es

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}$$

donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

6.24. ¿De cuántas formas se pueden sentar 7 personas en torno a una mesa redonda si: (*a*) son libres de elegir el asiento que deseen y (*b*) 2 personas particulares no pueden sentarse juntas?

Solución

(*a*) Sentemos a una en una silla. Entonces, los 6 restantes se pueden sentar de $6! = 720$ formas, que es el número total pedido.

(*b*) Consideremos a esas dos especiales como una sola persona. Entonces habría 6 personas, que se pueden sentar de 5! formas. Pero las 2 especiales se pueden colocar entre sí de 2! maneras, luego el número de formas en que se pueden situar 6 personas en una mesa redonda estando dos prefijadas juntas es $= 5!2! = 240$.

Usando la parte (*a*), la solución a (*b*) no es otra que $= 720 - 240 = 480$ maneras de sentarse con las condiciones impuestas.

COMBINACIONES

6.25. ¿De cuántas formas se pueden repartir 10 objetos en dos grupos de 4 y 6 objetos, respectivamente?

Solución

Es el mismo que el número de colocaciones de 10 objetos de los que 4 son iguales y los otros 6 son iguales. Por el Problema 6.23, es

$$\frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$$

El problema equivale a hallar el número de selecciones de 4 entre 10 objetos (o 6 entre 10), siendo irrelevante el orden de selección.

En general, el número de selecciones de r entre n objetos, llamado el número de *combinaciones* de n objetos tomados de r en r, se denota por $\binom{n}{r}$ y viene dado por

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

6.26. Calcular: (*a*) $\binom{7}{4}$, (*b*) $\binom{6}{5}$ y (*c*) $\binom{4}{4}$.

Solución

(*a*)

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

(*b*)

$$\binom{6}{5} = \frac{6!}{5!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5!} = 6 \quad \text{o} \quad \binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$$

(*c*) $\binom{4}{4}$ es el número de selecciones de 4 objetos tomados todos de golpe, y hay una sola selección, así que $\binom{4}{4} = 1$. Nótese que formalmente

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!0!} = 1$$

si definimos $0! = 1$.

6.27. ¿De cuántas maneras se puede formar con 9 personas una comisión de 5 miembros?

Solución

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!} = 126$$

6.28. De entre 5 matemáticos y 7 físicos hay que constituir una comisión de 2 matemáticos y 3 físicos. ¿De cuántas formas podrá hacerse si: (*a*) todos son elegibles, (*b*) un físico particular ha de estar en esa comisión y (*c*) dos matemáticos concretos tienen prohibido pertenecer a la comisión?

Solución

(*a*) Dos matemáticos entre 5 se pueden escoger de $\binom{5}{2}$ maneras, y 3 físicos de entre 7, de $\binom{7}{3}$ maneras. El número total de posibles selecciones es

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 10 \cdot 35 = 350$$

(*b*) Dos matemáticos entre 5 se pueden escoger de $\binom{5}{2}$ maneras, y los 2 físicos adicionales de entre 6 de $\binom{6}{2}$ formas. El número total de selecciones posibles es

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 10 \cdot 15 = 150$$

(*c*) Dos matemáticos entre 3 son elegibles de $\binom{3}{2}$ maneras, y 3 físicos de entre 7, de $\binom{7}{3}$ maneras. Luego el número total de selecciones posibles es

$$\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3} = 3 \cdot 35 = 105$$

6.29. ¿Cuántos ramilletes distintos se pueden formar con 5 flores de variedades diferentes?

Solución

Cada flor puede elegirse o no. Esas dos posibilidades ocurren para cada flor, luego en total 2^5. Pero de estas 2^5 opciones hay que excluir la consistente en no escoger ninguna. Luego el número de ramilletes es $= 2^5 - 1 = 31$.

Otro método

Podemos elegir 1 de las 5, o 2 de las 5, ..., o las 5 flores. De modo que el número pedido es

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

En general, para todo entero n positivo,

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

6.30. Con 7 consonantes y 5 vocales, ¿cuántas palabras se pueden formar que tengan 4 consonantes distintas y 3 vocales distintas? Se admiten palabras sin significado.

Solución

Las 4 consonantes se pueden escoger de $\binom{7}{4}$ maneras, las 3 vocales de $\binom{5}{3}$ maneras y las 7 letras ya elegidas se pueden colocar entre sí de ${}_7P_7 = 7!$ maneras. Así que el número requerido es

$$\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot 7! = 35 \cdot 10 \cdot 5040 = 1{,}764{,}000$$

APROXIMACION DE STIRLING A $n!$

6.31. Calcular aproximadamente 50!

Solución

Para n grande, tenemos $n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$; así que

$$50! \approx \sqrt{2\pi(50)}50^{50} e^{-50} = S$$

Para evaluar S usemos logaritmos en base 10. Tendremos

$$\begin{aligned}\log S = \log (\sqrt{100\pi}50^{50} e^{-50}) &= \tfrac{1}{2} \log 100 + \tfrac{1}{2} \log \pi + 50 \log 50 - 50 \log e \\ &= \tfrac{1}{2} \log 100 + \tfrac{1}{2} \log 3.142 + 50 \log 50 - 50 \log 2.718 \\ &= \tfrac{1}{2}(2) + \tfrac{1}{2}(0.4972) + 50(1.6990) - 50(0.4343) = 64.4846\end{aligned}$$

de donde $S = 3.05 \times 10^{64}$,

PROBABILIDAD Y ANALISIS COMBINATORIO

6.32. Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se sacan 3 bolas al azar, determinar la probabilidad de que: (*a*) las 3 sean rojas, (*b*) las 3 sean blancas, (*c*) 2 sean rojas y 1 blanca, (*d*) al menos 1 sea blanca, (*e*) sean una de cada color y (*f*) salgan en el orden roja, blanca, azul.

Solución

(*a*) *Primer método*

Denotemos por R_1, R_2 y R_3 los sucesos «la primera bola es roja», «la segunda bola es roja» y «la tercera bola es roja», respectivamente. Entonces $R_1R_2R_3$ denota el suceso de que las 3 sean rojas.

$$\Pr\{R_1R_2R_3\} = \Pr\{R_1\}\Pr\{R_2 \mid R_1\}\Pr\{R_3 \mid R_1R_2\} = \left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{7}{19}\right)\left(\frac{6}{18}\right) = \frac{14}{285}$$

Segundo método

$$\text{Probabilidad requerida} = \frac{\text{número selecciones de 3 entre 8}}{\text{número selecciones de 3 entre 20}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{14}{285}$$

(*b*) Usando el segundo método de la parte (*a*),

$$\Pr\{\text{las 3 son blancas}\} = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{1140}$$

Podía usarse también el primer método de (*a*).

(*c*)

$$\Pr\{\text{2 son rojas y 1 blanca}\} = \frac{\begin{pmatrix}\text{selecciones de 2 entre}\\ \text{8 bolas rojas}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{selecciones de 1 entre}\\ \text{3 bolas blancas}\end{pmatrix}}{\text{número de selecciones de 3 entre 20 bolas}} = \frac{\binom{8}{2}\binom{3}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{7}{95}$$

(*d*)

$$\Pr\{\text{ninguna es blanca}\} = \frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{34}{57} \qquad \text{o} \qquad \Pr\{\text{al menos 1 es blanca}\} = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57}$$

(*e*)

$$\Pr\{\text{sacar 1 de cada color}\} = \frac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{18}{95}$$

(*f*) Usando la parte (*e*),

$$\Pr\{\text{bolas en orden roja, blanca, azul}\} = \frac{1}{3!}\Pr\{\text{1 de cada color}\} = \frac{1}{6}\left(\frac{18}{95}\right) = \frac{3}{95}$$

Otro método

$$\Pr\{R_1 W_2 B_2\} = \Pr\{R_1\} \Pr\{W_2 \mid R_1\} \Pr\{B_3 \mid R_1 W_2\} = \left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{3}{19}\right)\left(\frac{9}{18}\right) = \frac{3}{95}$$

6.33. De una baraja de 52 naipes bien mezclada se sacan 5 naipes. Hallar la probabilidad de que: (*a*) 4 sean ases, (*b*) 4 sean ases y 1 rey, (*c*) 3 sean dieces y 2 sotas, (*d*) salgan nueve, diez, sota, caballo y rey en cualquier orden, (*e*) 3 son de un palo y 2 de otro y (*f*) al menos uno sea un as.

Solución

(*a*)

$$\Pr\{4 \text{ ases}\} = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{54{,}145}$$

(*b*)

$$\Pr\{4 \text{ ases y 1 rey}\} = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{649{,}740}$$

(*c*)

$$\Pr\{3 \text{ son dieces y 2 son sotas}\} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{108{,}290}$$

(*d*)

$$\Pr\{\text{nueve, diez, sota, caballo, rey en cualquier orden}\} = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{64}{162{,}435}$$

(*e*) Como hay cuatro formas de escoger el primer palo y tres de elegir el segundo,

$$\Pr\{3 \text{ de cualquier figura, 2 de otra}\} = \frac{4\binom{13}{3} \cdot 3\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{429}{4165}$$

(*f*)

$$\Pr\{\text{ningún as}\} = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{35{,}673}{54{,}145} \quad \text{y} \quad \Pr\{\text{al menos 1 as}\} = 1 - \frac{35{,}673}{54{,}145} = \frac{18{,}482}{54{,}145}$$

6.34. Determinar la probabilidad de sacar 3 seises en 5 tiradas de un dado.

Solución

Representemos las 5 tiradas por 5 espacios — — — — —. En cada espacio tendremos los sucesos 6 o no 6 ($\bar{6}$); por ejemplo, tres 6 y dos no 6 pueden ocurrir como 6 6 $\bar{6}$ 6 $\bar{6}$ o como 6 $\bar{6}$ 6 $\bar{6}$ 6, etc.

Ahora bien, la probabilidad de un suceso tal como 6 6 $\bar{6}$ 6 $\bar{6}$ es

$$\Pr\{6\ 6\ \bar{6}\ 6\ \bar{6}\} = \Pr\{6\}\Pr\{6\}\Pr\{\bar{6}\}\Pr\{6\}\Pr\{\bar{6}\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Similar $\Pr\{6\ \bar{6}\ 6\ \bar{6}\ 6\} = (\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^2$, etc., para todos los sucesos en los que salen tres 6 y dos no 6. Pero hay $\binom{5}{3} = 10$ de tales sucesos, y esos sucesos son sucesos mutuamente excluyentes; por tanto, la probabilidad requerida es

$$\Pr\{6\ 6\ \bar{6}\ 6\ \bar{6}\ \text{ó}\ 6\ \bar{6}\ 6\ \bar{6}\ 6\ \text{o etc.}\} = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{3888}$$

En general, si $p = \Pr\{E\}$ y $q = \Pr\{\bar{E}\}$, entonces usando el mismo argumento que antes, la probabilidad de obtener exactamente X veces E en N intentos es $\binom{N}{X}p^X q^{N-X}$.

6.35. Una factoría observa que, en promedio, el 20% de las tuercas producidas por una máquina son defectuosas. Si se toman 10 tuercas al azar, hallar la probabilidad de que: (*a*) exactamente 2 sean defectuosas, (*b*) 2 o más sean defectuosas y (*c*) más de 5 sean defectuosas.

Solución

(*a*) Por un razonamiento similar al del Problema 6.34,

$$\Pr\{2\text{ tuercas defectuosas}\} = \binom{10}{2}(0.2)^2(0.8)^8 = 45(0.04)(0.1678) = 0.3020$$

(*b*)

$$\begin{aligned}\Pr\{2\text{ o más tuercas defectuosas}\} &= 1 - \Pr\{0\text{ tuercas defectuosas}\} - \Pr\{1\text{ tuercas defectuosas}\}\\ &= 1 - \binom{10}{0}(0.2)^0(0.8)^{10} - \binom{10}{1}(0.2)^1(0.8)^9\\ &= 1 - (0.8)^{10} - 10(0.2)(0.8)^9\\ &= 1 - 0.1074 - 0.2684 = 0.6242\end{aligned}$$

(*c*)

$$\begin{aligned}\Pr\{\text{más de 5 tuercas defectuosas}\} &= \Pr\{6\text{ tuercas defectuosas}\} + \Pr\{7\text{ tuercas defectuosas}\}\\ &\quad + \Pr\{8\text{ tuercas defectuosas}\} + \Pr\{9\text{ tuercas defectuosas}\}\\ &\quad + \Pr\{10\text{ tuercas defectuosas}\}\\ &= \binom{10}{6}(0.2)^6(0.8)^4 + \binom{10}{7}(0.2)^7(0.8)^3 + \binom{10}{8}(0.2)^8(0.8)^2\\ &\quad + \binom{10}{9}(0.2)^9(0.8) + \binom{10}{10}(0.2)^{10}\\ &= 0.00637\end{aligned}$$

6.36. Si se tomaran 1000 muestras de 10 tuercas cada una en el Problema 6.35, ¿de cuántas de ellas cabría esperar que tuvieran: (*a*) exactamente 2 defectuosas, (*b*) 2 o más defectuosas y (*c*) más de 5 defectuosas?

Solución

(*a*) Número esperado = (1000)(0.3020) = 302, por el Problema 6.35(*a*).
(*b*) Número esperado = (1000)(0.6242) = 624, por el Problema 6.35(*b*).
(*c*) Número esperado = (1000)(0.00637) = 6, por el Problema 6.35(*c*).

ESPACIO MUESTRAL Y DIAGRAMAS DE EULER

6.37. (*a*) Describir un espacio muestral para una tirada de un par de dados.
(*b*) Determinar a partir de él la probabilidad de que la suma de los dados sea 7 u 11.

Solución

(*a*) El espacio muestral consta de los puntos de la Figura 6.7, cuyas primeras coordenadas son las puntuaciones del primer dado y las segundas coordenadas son las puntuaciones del segundo dado. Hay 36 puntos, y a cada uno le asignamos una probabilidad de $\frac{1}{36}$. La suma de todas esas probabilidades es 1.

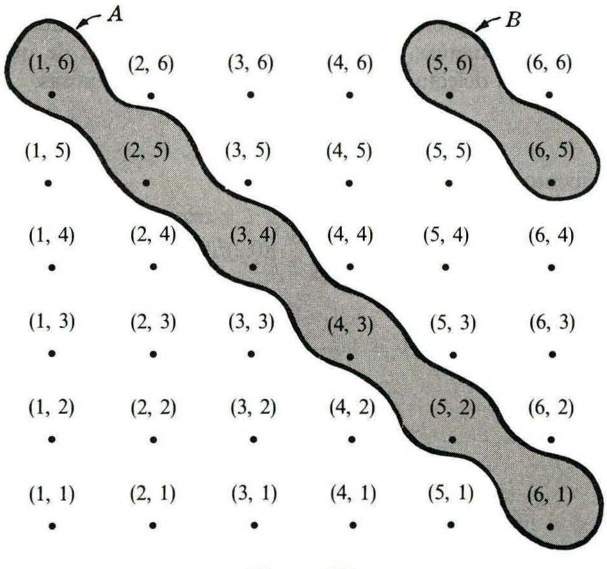

Figura 6.7.

(*b*) Los conjuntos de puntos correspondientes a los sucesos «suma 7» y «suma 11» se indican por A y B, respectivamente.

$\Pr\{A\}$ = suma de probabilidades asociadas con cada punto de $A = \frac{6}{36}$
$\Pr\{B\}$ = suma de probabilidades asociadas con cada punto de $B = \frac{2}{36}$
$\Pr\{A + B\}$ = suma de probabilidades de los puntos en A, en B o en ambos

Nótese que en este caso $\Pr\{A + B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$. Ello ocurre porque A y B no tienen puntos en común (es decir, son sucesos mutuamente excluyentes).

6.38. Usando un espacio muestral, probar que:

(*a*) $\Pr\{A + B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$

(*b*) $\Pr\{A + B + C\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{C\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$

Solución

(*a*) Sean A y B dos conjuntos de puntos con puntos comunes denotados por AB, como en la Figura 6.8. A consta de $A\bar{B}$ y de AB, mientras B está compuesto por $B\bar{A}$ y AB. La totalidad de puntos en $A + B$ (o bien A, o B o ambos) = totalidad de puntos en A + totalidad de puntos en B − totalidad de puntos en AB. Como la probabilidad de un suceso conjunto es la suma de las probabilidades asociadas a sus puntos, tenemos

$$\Pr\{A + B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$

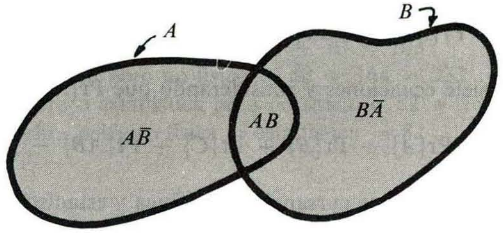

Figura 6.8.

Otro método

Denotemos por $A - AB$ el conjunto de puntos que están en A, pero no en B (es lo mismo que $A\bar{B}$); entonces $A - AB$ y B son mutuamente excluyentes (o sea, sin puntos en común). Además, $\Pr\{A - AB\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}$. Luego

$$\Pr\{A + B\} = \Pr\{A - AB\} + \Pr\{B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\} + \Pr\{B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$

(*b*) Sean A, B y C tres conjuntos de puntos, como indica la Figura 6.9. El símbolo $AB\bar{C}$ significa el conjunto de puntos en A y B que no están en C, y los otros símbolos son análogos.

Podemos considerar puntos que están en A o B o C como incluidos en los 7 conjuntos mutuamente excluyentes de la Figura 6.9, cuatro de los cuales están sombreados y tres sin sombrear. La probabilidad pedida viene dada por

$$\Pr\{A+B+C\} = \Pr\{A\bar{B}\bar{C}\} + \Pr\{B\bar{C}\bar{A}\} + \Pr\{C\bar{A}\bar{B}\} + \Pr\{AB\bar{C}\} + \Pr\{BC\bar{A}\} + \Pr\{CA\bar{B}\} + \Pr\{ABC\}$$

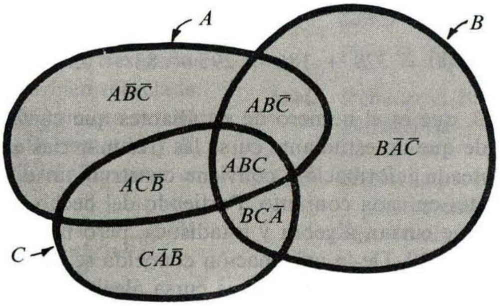

Figura 6.9.

Para obtener ahora $A\bar{B}\bar{C}$, por ejemplo, eliminamos los puntos comunes a A, B y a A, C; pero al hacerlo, hemos quitado los puntos comunes a A, B, C dos veces. Por tanto, $A\bar{B}\bar{C} = A - AB - AC + ABC$, y

$$\Pr\{A\bar{B}\bar{C}\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$$

Análogamente, se encuentra

$$\begin{aligned}
\Pr\{B\bar{C}\bar{A}\} &= \Pr\{B\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{BA\} + \Pr\{BCA\} \\
\Pr\{C\bar{A}\bar{B}\} &= \Pr\{C\} - \Pr\{CA\} - \Pr\{CB\} + \Pr\{CAB\} \\
\Pr\{BC\bar{A}\} &= \Pr\{BC\} - \Pr\{ABC\} \\
\Pr\{CA\bar{B}\} &= \Pr\{CA\} - \Pr\{BCA\} \\
\Pr\{AB\bar{C}\} &= \Pr\{AB\} - \Pr\{CAB\} \\
\Pr\{ABC\} &= \Pr\{ABC\}
\end{aligned}$$

Sumando esas siete ecuaciones y considerando que $\Pr\{AB\} = \Pr\{BA\}$, etc., obtenemos

$$\Pr\{A + B + C\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{C\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$$

6.39. Un recuento de 500 estudiantes que cursan álgebra, física y estadística reveló los siguintes números de estudiantes matriculados en las materias indicadas:

Algebra	329	Algebra y física	83
Física	186	Algebra y estadística	217
Estadística	295	Física y estadística	63

¿Cuántos estudiantes están matriculados en: (*a*) las tres, (*b*) álgebra pero no estadística, (*c*) física pero no álgebra, *d*) estadística pero no física, (*e*) álgebra o estadística pero no física y (*f*) álgebra pero no física ni estadística?

Solución

Sea A el conjunto de estudiantes matriculados en álgebra y (A) el número de ellos. Lo mismo con B, (B) para la física, y con C, (C) para la estadística. Entonces $(A + B + C)$ denota el número de estudiantes matriculados bien en álgebra o en física o en estadística o combinaciones de ellas, (AB) el de los matriculados en ambas, álgebra y física, etc. Como en el Problema 6.38, se sigue que

$$(A + B + C) = (A) + (B) + (C) - (AB) - (BC) - (AC) + (ABC)$$

(*a*) Sustituyendo los números dados en esa expresión, vemos que

$$500 = 329 + 186 + 295 - 83 - 63 - 217 + (ABC)$$

o sea $(ABC) = 53$, que es el número de estudiantes que cursan las tres. Nótese que la probabilidad (empírica) de que un estudiante curse las tres materias es $\frac{53}{500}$.

(*b*) Para obtener la deseada información, conviene construir un diagrama de Euler que muestre el número de estudiantes en cada conjunto. Partiendo del hecho de que 53 de ellos cursan las tres, deducimos que los que cursan álgebra y estadística, pero no física, son $217 - 53 = 164$, como se indica en la Figura 6.10. De la información conocida se deducen los otros números.

De los datos se sigue que el número que cursa álgebra, pero no estadística $= 329 - 217$; y por la Figura 6.10, $82 + 30 = 112$.

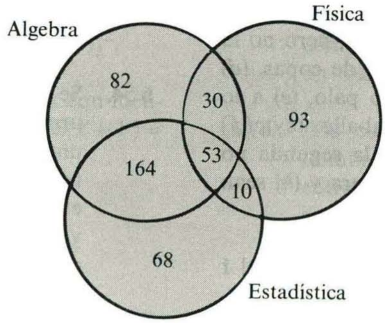

Figura 6.10.

(*c*) Número que cursa física pero no álgebra = 93 + 10 = 103
(*d*) Número que cursa estadística pero no física = 68 + 164 = 232
(*e*) Número que cursa álgebra o estadística pero no física = 82 + 164 + 68 = 314
(*f*) Número que cursa álgebra pero no física ni estadística = 82

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

REGLAS FUNDAMENTALES DE LA PROBABILIDAD

6.40. Determinar la probabilidad *p*, o estimarla, para los sucesos:

(*a*) Al extraer una carta de una baraja bien mezclada se saca as, rey o la sota de bastos o el caballo de oros.
(*b*) Al lanzar un par de dados salga suma 8.
(*c*) Encontrar una tuerca defectuosa si entre 600 ya examinadas había 12 defectuosas.
(*d*) Sumar 7 u 11 en una tirada de un par de dados.
(*e*) Sacar al menos una cara en tres lanzamientos de una moneda.

6.41. Un experimento consiste en sacar tres cartas sucesivamente de una baraja bien mezclada. Sea E_1 el suceso «rey» en la primera extracción, E_2 el suceso «rey» en la segunda y E_3 el suceso «rey» en la tercera. Expresar en palabras el significado de:

(*a*) $\Pr\{E_1\bar{E}_2\}$ (*d*) $\Pr\{E_3 \mid E_1\bar{E}_2\}$
(*b*) $\Pr\{E_1 + E_2\}$ (*e*) $\bar{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_3$
(*c*) $\bar{E}_1 + \bar{E}_2$ (*f*) $\Pr\{E_1E_2 + \bar{E}_2E_3\}$

6.42. Se saca al azar una bola de una caja que contiene 10 rojas, 30 blancas, 20 azules y 15 naranja. Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea: (*a*) roja o naranja, (*b*) ni roja ni azul, (*c*) no azul, (*d*) blanca y (*e*) roja, blanca o azul.

6.43. De la caja del Problema 6.42 se saca una bola, se repone y se hace una nueva extracción. Hallar la probabilidad de que: (*a*) ambas sean blancas, (*b*) la primera sea roja y la segunda blanca, (*c*) ninguna sea naranja, (*d*) ambas son rojas, o blancas o una de cada, (*e*) la segunda no sea azul, (*f*) la primera sea naranja, (*g*) al menos una sea azul, (*h*) a lo sumo una sea roja, (*i*) la primera sea azul, pero la segunda no y (*j*) sólo una sea roja.

6.44. Rehacer el Problema 6.43 sin reponer tras la extracción.

6.45. Hallar la probabilidad de obtener un total de 7 puntos en dos tiradas de un dado: (*a*) una vez, (*b*) al menos una vez y (*c*) dos veces.

6.46. Se extraen sucesivamente dos cartas de una baraja bien mezclada. Hallar la probabilidad de que: (*a*) la primera no sea un 10 de bastos o un as, (*b*) la primera sea un as, pero no la segunda, (*c*) al menos una sea de copas, (*d*) las cartas no sean del mismo palo, (*e*) a lo sumo una sea figura (sota, caballo, rey), (*f*) la segunda no sea figura, (*g*) la segunda no sea figura si la primera era figura y (*h*) sean figuras o espadas o ambas cosas.

6.47. Una caja contiene 9 tickets numerados del 1 al 9. Si se extraen 3 a la vez, hallar la probabilidad de que sean: (*a*) impar, par, impar, o (*b*) par, impar, par.

6.48. Las apuestas a favor de que A gane una partida de ajedrez contra B están 3 : 2. Si se disputan 3 partidas, ¿cuáles son las apuestas: (*a*) a favor de que A gane al menos dos y (*b*) en contra de que A pierda las dos primeras?

6.49. Un bolso contiene 2 monedas de plata y 4 de cobre, y otro contiene 4 de plata y 3 de cobre. Si se coge al azar de uno de los bolsos una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que sea de plata?

6.50. La probabilidad de que un hombre siga vivo dentro de 25 años es $\frac{3}{5}$, y la de que su esposa lo esté es de $\frac{2}{3}$. Hallar la probabilidad de que en ese momento: (*a*) ambos estén vivos, (*b*) sólo el hombre viva, (*c*) sólo viva la esposa y (*d*) al menos uno esté vivo.

6.51. De entre 800 familias con 4 hijos cada una, ¿qué porcentaje es de esperar que tenga: (*a*) 2 chicos y dos chicas, (*b*) al menos un chico, (*c*) ninguna chica y (*d*) a lo sumo 2 chicas? Se supone igual probabilidad para chicos y chicas.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

6.52. Si X es la variable aleatoria que da el número de chicos en familias de 4 hijos (véase Prob. 6.51): (*a*) construir una tabla que muestre su distribución de probabilidad y (*b*) representar la distribución de probabilidad de la parte (*a*) gráficamente.

6.53. Una variable aleatoria continua X que toma valores entre 2 y 8 inclusive, tiene una función densidad dada por $a(X + 3)$, con a constante: (*a*) calcular a; hallar: (*b*) $\Pr\{3 < X < 5\}$, (*c*) $\Pr\{X \geqslant 4\}$ y (*d*) $\Pr\{|X - 5| < 0.5\}$.

6.54. Se extraen, sin reposición, tres fichas de una urna que contiene 4 rojas y 6 blancas. Si X es una variable aleatoria que denota el número total de fichas rojas extraídas: (*a*) construir en una tabla su distribución de probabilidad y (*b*) representar gráficamente esa distribución de probabilidad.

6.55. Para el Problema 6.54, hallar: (*a*) $\Pr\{X = 2\}$, y (*b*) $(\Pr\{1 \leqslant X \leqslant 3\}$, e interpretar los resultados.

ESPERANZA MATEMATICA

6.56. ¿Cuál es el precio justo para participar en un juego en el que se ganan \$25 con probabilidad 0.2 y \$10 con probabilidad 0.4?

6.57. Si llueve, un vendedor de paraguas gana \$30 al día, y si no llueve pierde \$6 al día. ¿Cuál es su esperanza matemática si la probabilidad de lluvia es 0.3?

6.58. A y B juegan a tirar una moneda tres veces. Gana el primero que saque cara. Si A lanza primero y el montante de la apuesta es \$20, ¿cuánto debe poner cada uno para que el juego sea justo?

6.59. Hallar: (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(X^2)$, (*c*) $E[(X - \bar{X})^2]$ y (*d*) $E(X^3)$ para la distribución de probabilidad de la Tabla 6.4.

Tabla 6.4

X	-10	-20	30
$p(X)$	1/5	3/10	1/2

6.60. Refiriéndonos al Problema 6.54, hallar: (*a*) la media, (*b*) la varianza y (*c*) la desviación típica de la distribución de X, e interpretar los resultados.

6.61. Una variable aleatoria toma el valor 1 con probabilidad p y el 0 con probabilidad $q = 1 - p$. Probar que: (*a*) $E(X) = p$ y (*b*) $E[(X - \bar{X})^2] = pq$.

6.62. Probar que: (*a*) $E(2X + 3) = 2E(X) + 3$ y (*b*) $E[(X - \bar{X})^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$.

6.63. Sea X e Y dos variables aleatorias con idéntica distribución. Demostrar que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

PERMUTACIONES

6.64. Evaluar: (*a*) ${}_4P_2$, (*b*) ${}_7P_5$ y (*c*) ${}_{10}P_3$.

6.65. ¿Para qué valor de n es ${}_{n+1}P_3 = {}_nP_4$?

6.66. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 personas en un sofá de 3 plazas?

6.67. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 7 libros en una estantería si: (*a*) cualquier colocación es admitida, (*b*) 3 libros particulares han de estar juntos y (*c*) 2 libros particulares deben ocupar los extremos?

6.68. ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, ..., 9 si: (*a*) cada número ha de ser impar y (*b*) los dos primeros dígitos han de ser pares?

6.69. Resolver el Problema 6.68 permitiendo repeticiones de dígitos.

6.70. ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con 3 cuatros, 4 doses y 2 treses?

6.71. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 3 hombres y 3 mujeres en una mesa redonda si: (*a*) no se imponen restricciones, (*b*) 2 mujeres particulares no pueden sentarse juntas y (*c*) cada mujer ha de estar entre dos hombres?

COMBINACIONES

6.72. Evaluar: (*a*) $\binom{7}{3}$, (*b*) $\binom{8}{4}$ y (*c*) $\binom{10}{8}$.

6.73. ¿Para qué valor de n es $3\binom{n+1}{3} = 7\binom{n}{2}$?

6.74. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse 6 cuestiones de entre un total de 10?

6.75. ¿De cuántas maneras puede formarse una comisión de 3 hombres y 4 mujeres de entre un total de 8 hombres y 6 mujeres?

6.76. ¿De cuántas maneras pueden escogerse 2 hombres, 4 mujeres, 3 niños y 3 niñas de entre 6 hombres, 8 mujeres, 4 niños y 5 niñas si: (*a*) no se impone restricción alguna y (*b*) un hombre y una mujer concretos deben ser elegidos?

6.77. ¿De cuántas maneras puede dividirse un grupo de 10 personas en dos grupos de 7 y 3 personas?

6.78. ¿De cuántas maneras puede elegirse una comisión de 3 estadísticos y 2 economistas de entre 5 estadísticos y 6 economistas si: (*a*) no se imponen restricciones, (*b*) 2 estadísticos particulares han de figurar en ella y (*c*) un economista concreto tiene vetado el figurar en ella?

6.79. Hallar el número de: (*a*) combinaciones y (*b*) permutaciones de 4 letras que pueden formarse con las letras de la palabra *Tennessee*.

6.80. Demostrar que $1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.

APROXIMACION DE STIRLING A *n*!

6.81. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse 30 individuos de entre 100?

6.82. Probar que $\binom{2n}{n} = 2^{2n}/\sqrt{\pi n}$, aproximadamente, para grandes valores de n.

PROBLEMAS DIVERSOS

6.83. Se sacan 3 cartas de una baraja de 52 cartas. Hallar la probabilidad de que: (*a*) dos sean sotas y una rey, (*b*) todas sean del mismo palo, (*c*) sean de palos diferentes y (*d*) al menos dos sean ases.

6.84. Hallar la probabilidad de al menos dos sietes en 4 tiradas de un par de dados.

6.85. Si el 10% de los remaches producidos por una máquina son defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que entre 5 elegidos al azar: (*a*) ninguno sea defectuoso, (*b*) haya uno defectuoso y (*c*) al menos dos lo sean?

6.86. (*a*) Describir un espacio muestral para los resultados de dos lanzamientos de una moneda, usando 1 para representar «cara» y 0 para «cruz».
(*b*) Con tal espacio muestral, determinar la probabilidad de al menos una cara.
(*c*) ¿Puede dar un espacio muestral para los resultados de lanzar 3 veces una moneda? En caso afirmativo, determine con su ayuda la probabilidad de al menos 2 caras.

6.87. Un muestreo de 200 votantes revela la siguiente información referente a tres candidatos A, B y C de un cierto partido que se disputaban tres cargos diferentes:

28 a favor de ambos A y B
98 a favor de A o B pero no C
42 a favor de B pero no A o C
122 a favor de B o C pero no A
64 a favor de C pero no A o B
14 a favor de A y C pero no B

¿Cuántos de los votantes están a favor de: (*a*) los tres candidatos, (*b*) de A e indiferentes a B y C, (*c*) de B e indiferentes a A y C, (*d*) de C e indiferentes a A y B, (*e*) de A y B, pero no de C y (*f*) sólo de uno de los candidatos?

6.88. (*a*) Probar que para cualesquiera sucesos E_1 y E_2, $\Pr\{E_1 + E_2\} \leqslant \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$.
(*b*) Generalizar el resultado de la parte (*a*).

6.89. Sean E_1, E_2 y E_3 tres sucesos diferentes, al menos uno de los cuales se sabe que ha ocurrido. Si todas las probabilidades $\Pr\{E_1\}$, $\Pr\{E_2\}$, $\Pr\{E_3\}$ y $\Pr\{A \mid E_1\}$, $\Pr\{A \mid E_2\}$, $\Pr\{A \mid E_3\}$ se suponen conocidas, probar que

$$\Pr\{E_1 \mid A\} = \frac{\Pr\{E_1\}\,\Pr\{A \mid E_1\}}{\sum_1^3 j \Pr\{E_j\}\,\Pr\{A \mid E_j\}}$$

con resultados similares para $\Pr\{E_2 \mid A\}$ y $\Pr\{E_3 \mid A\}$. Esto se conoce como *regla* o *teorema* de Bayes. Es útil al calcular probabilidades de varias hipótesis que han resultado en el suceso A. El resultado es generalizable.

6.90. Tres joyeros idénticos tienen cada uno dos cajones. Cada cajón del primero contiene un reloj de oro, y cada uno del segundo un reloj de plata. En un cajón del tercero hay uno de oro y en el otro uno de plata. Si seleccionamos un joyero al azar, abrimos uno de sus cajones y en él hay un reloj de plata, ¿cuál es la probabilidad de que en el otro cajón haya un reloj de oro? [*Ayuda:* Aplicar el Problema 6.89.]

6.91. Hallar la probabilidad de acertar una loto en la que se deben marcar 6 números de entre 1, 2, 3, ..., 40 en cualquier orden.

6.92. Rehacer el Problema 6.91 si se marcan: (*a*) 5, (*b*) 4 y (*c*) 3 de los números.

6.93. En el póquer se dan a cada jugador 5 cartas de una baraja de 52 cartas. Determinar las apuestas en contra de que un jugador reciba:

(*a*) Escalera de color máxima (10, J, Q, K y as del mismo palo).
(*b*) Escalera de color (cinco cartas sucesivas del mismo palo, por ejemplo, 3, 4, 5, 6 y 7 de tréboles).
(*c*) Un póquer (cuatro cartas iguales, por ejemplo, cuatro sietes).
(*d*) Un «full» (un trío y una pareja, por ejemplo, tres reyes y dos cincos).

6.94. A y B deciden encontrarse entre las 3 y las 4 de la tarde, pero acuerdan que cada uno no espera más de 10 minutos al otro. Hallar la probabilidad de que se encuentren.

6.95. Se escogen al azar dos puntos en un segmento recto de longitud $a > 0$. Hallar la probabilidad de que los tres segmentos así formados puedan ser los lados de un triángulo.