PARTE IV

Repaso de notas matemáticas

CAPITULO 15

Cálculo

15.1 INTRODUCCION

El cálculo es la herramienta matemática de trabajo más importante en el análisis de ingeniería. De hecho, en el siglo XVII, el desarrollo del cálculo que llevaron a cabo Newton, Leibnitz, y otros, fue en forma primordial resultado de la necesidad de establecer una estructura matemática que fuera adecuada para la descripción de los fenómenos físicos. Las técnicas detalladas del cálculo requieren práctica intensa para desarrollar la eficiencia necesaria, y es por esta razón que todos los estudiantes de ingeniería deben tomar uno o más cursos de esta materia. Se pretende que este capítulo sirva como revisión y referencia para todos los principios que se requieran en este texto. No es rigurosa ni completa, y deberán consultarse textos de cálculos siempre que sea necesario.

15.2 FUNCION

Una *función* es una regla para efectuar operaciones con una variable a fin de obtener valores de otra. Por ejemplo, cuando se escribe:

$$y = t^2$$

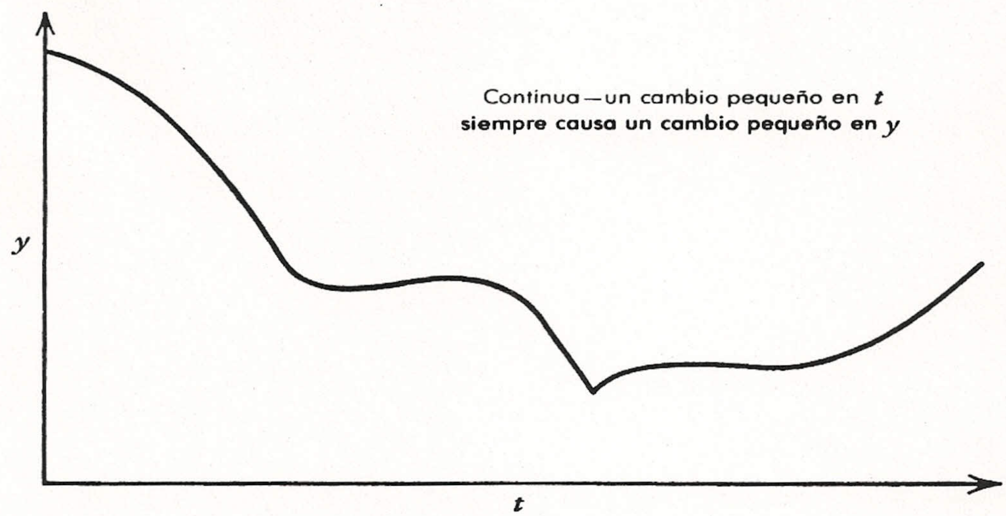
se quiere indicar "para un valor dado de t calcule el valor de y elevando al cuadrado el valor de t". Cuando $t = 2$, el valor de y es 4, cuando $t = 3$, el valor de y es 9, y así sucesivamente. En términos físicos se puede decir "la velocidad de flujo es una función de la altura", indicando que cuando se especifica la altura se puede calcular la velocidad de flujo. La regla de dicho cálculo podría ser una ecuación, como la anterior, una tabla o una gráfica. En símbolos se escribe

$$y = f(t)$$

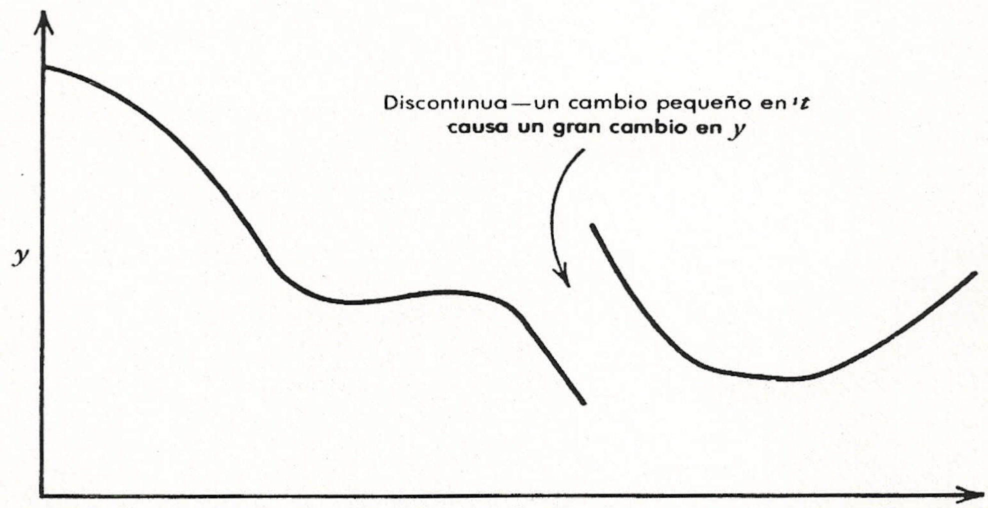
"y es una función de t" o

$$q = f(h)$$

"la velocidad de flujo, q, es una función de la altura, h". Note que el símbolo $f(t)$ es simplemente una abreviatura de las palabras "es una función de t", y no dice nada respecto a la regla para calcular y a partir de t.



(a)



(b)

FIGURA 15.1 Gráfica de y como una función de t. (*a*) Función continua. (*b*) Función discontinua.

t (o h) se refiere a la *variable independiente*, o al *argumento de la función* y y (o q) es la *variable dependiente*. Una función es *continua* si al producirse pequeños cambios en la variable independiente, esto causa pequeños cambios en la variable dependiente; de otra forma, es discontinua. (vea figura 15.1). La mayoría de los procesos físicos (pero no todos) pueden representarse mediante funciones continuas.

15.3 DERIVADA

El cálculo está relacionado primordialmente con cambios en funciones continuas. Considere la función $y = f(t)$ que se muestra gráficamente en la figura 15.2. Con

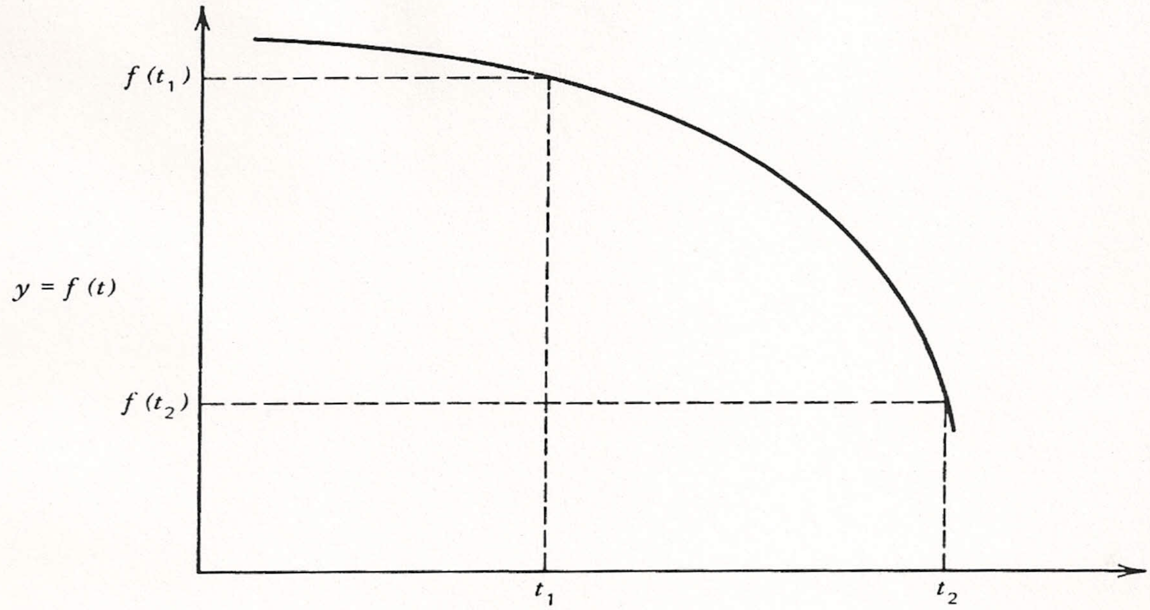


FIGURA 15.2 y en función de t. A $t = t_1$, $y = f(t_1)$; y $t = t_2$, $y = f(t_2)$.

un valor t_1 de la variable independiente, la función tiene un valor calculado por $f(t_1)$, y un valor $f(t_2)$ cuando se tiene t_2. El *cambio* al ir de t_1 a t_2 se expresa como:

$$\underset{1\to 2}{\Delta} f \equiv f(t_2) - f(t_1)$$

mientras que el cambio correspondiente a la variable independiente es:

$$\underset{1\to 2}{\Delta} t \equiv t_2 - t_1$$

El *promedio en la velocidad de cambio* de $f(t)$ es:

$$\underset{1\to 2}{\text{velocidad promedio de cambio}} = \frac{\underset{1\to 2}{\Delta} f}{\underset{1\to 2}{\Delta} t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

(Para simplificar a partir de aquí se escribirá solamente Δ en vez de $\underset{1\to 2}{\Delta}$, siempre se sobreentiende esto último.) Note que la velocidad promedio de cambio $\Delta f/\Delta t$ constituye simplemente la pendiente de la cuerda en la figura 15.3 entre $f(t_1)$ y $f(t_2)$.

La velocidad de cambio promedio es más bien una característica burda del intervalo total desde t_1 hasta t_2. Por ejemplo si se ha escogido un punto diferente, t_3, se podría escribir:

$$\underset{t_1\to t_3}{\text{velocidad promedio de cambio}} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_3) - f(t_1)}{t_3 - t_1}$$

y la velocidad promedio de cambio podría ser la pendiente de la línea recta en la figura 15.3 entre $f(t_1)$ y $f(t_3)$. En general, se podrían considerar cualesquiera de

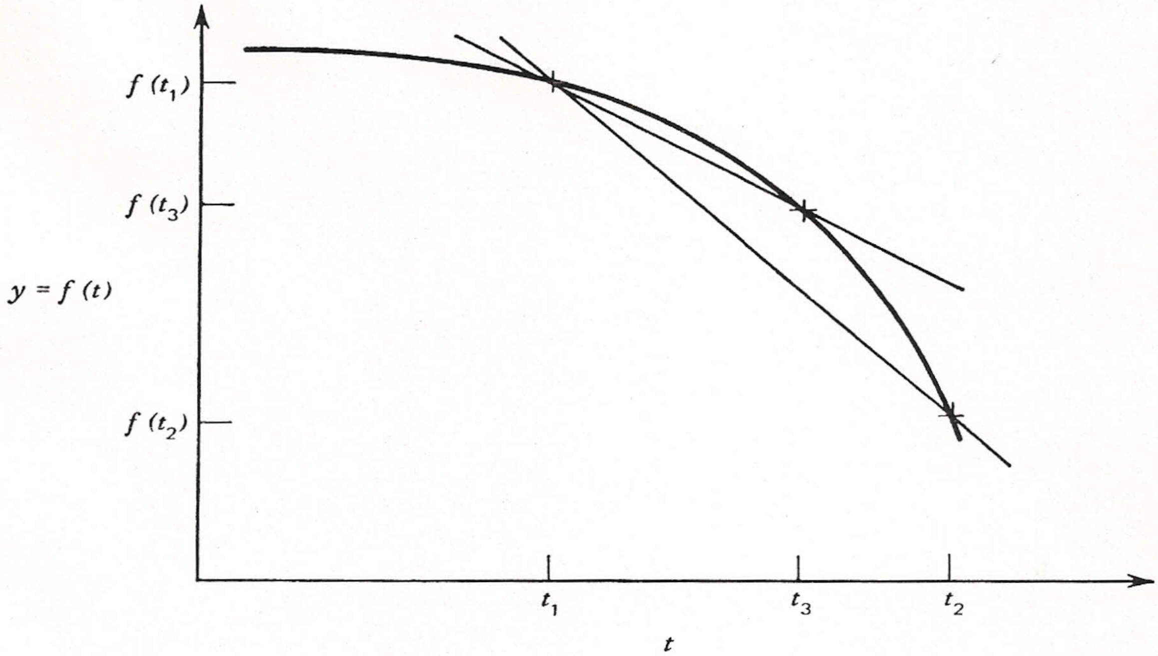


FIGURA 15.3 Velocidad promedio de cambio de y entre t_1 y los puntos subsecuentes.

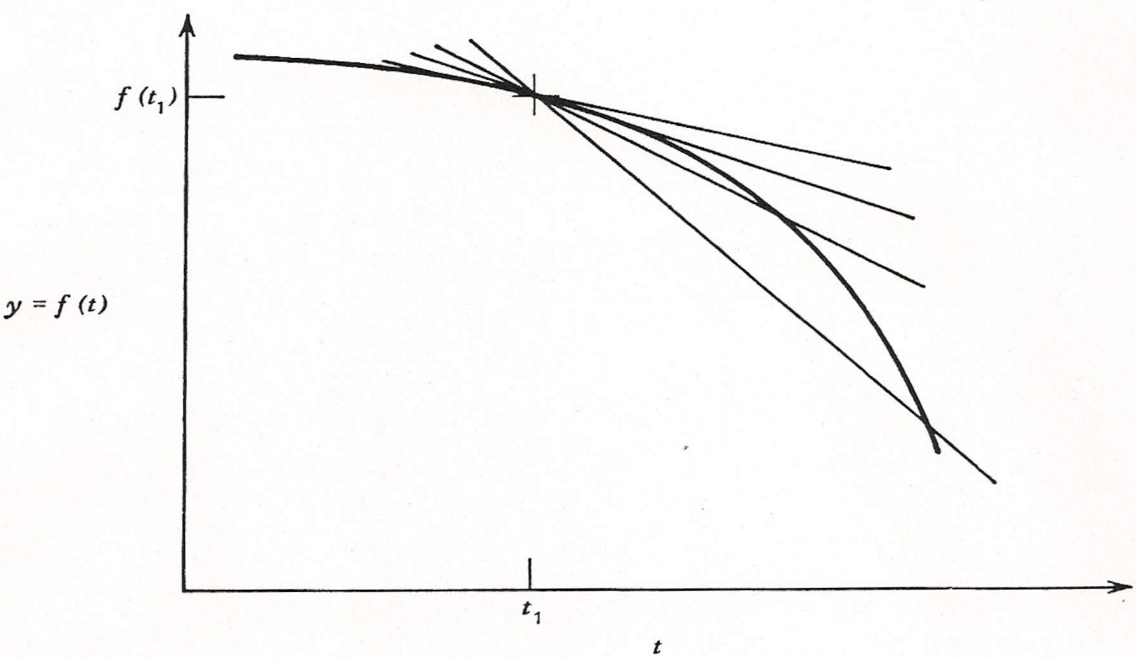


FIGURA 15.4 Velocidad promedio de cambio de y entre t_1 y otros puntos subsecuentes. A medida que el último punto se aproxima a t_1 la velocidad media de cambio se aproxima a la tangente.

dos valores de la variable independiente, t_1 y $t_1 + \Delta t$, con los valores correspondientes de la variable dependiente calculados por $f(t_1)$ y $f(t_1 + \Delta t)$. Para diversos valores de Δt el promedio de la velocidad de cambio, $\Delta f/\Delta t$, se obtiene a partir de la pendiente de una de las líneas rectas en la figura 15.4. Note que a medida que Δt se hace más y más pequeña, la pendiente de la cuerda se aproxima cada vez más a la tangente de $f(t)$ en $t = t_1$. Puede escribirse:

$$\text{velocidad de cambio } en\ t_1 = \frac{\Delta f}{\Delta t} \text{ para } \Delta t \text{ pequeña y que desaparece.}$$

Simbólicamente, la velocidad de cambio en t_1, tangente, se denota por df/dt y "$\Delta f/\Delta t$ para t pequeña que desaparece" como $\text{límite}_{\Delta t\to 0}\ \Delta f/\Delta t$. Por consiguiente:

$$\frac{df}{dt} = \underset{\Delta t\to 0}{\text{límite}}\frac{\Delta f}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{\text{límite}}\frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{t_1 + \Delta t - t_1} \tag{15.1}$$

Ejemplo 15.1

$f(t) = t^2$. Calcule df/dt.

$$\frac{df}{dt} = \underset{\Delta t\to 0}{\text{límite}}\frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{\text{límite}}\frac{[t_1 + \Delta t]^2 - [t_1]^2}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t\to 0}{\text{límite}}\frac{2t_1\,\Delta t + [\Delta t]^2}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{\text{límite}}\,2t_1 + \Delta t = 2t_1$$

Si se considera cualquier valor de t, entonces es posible eliminar el sub-índice "1" y escribir:

$$\frac{d[t^2]}{dt} = 2t$$

La pendiente o tangente, df/dt, es en sí misma una función de la variable independiente. Esta nueva función se llama *derivada de f*, y frecuentemente se representa por el símbolo $f'(t)$. Su derivada es la segunda derivada de f, d^2f/dt^2 o $f''(t)$. La enésima derivada se representa como d^nf/dt^n, o $f^{(n)}(t)$. Las siguientes relaciones que conciernen a las derivadas son muy útiles, y pueden obtenerse directamente del material presentado aquí:

(*a*) $$f(t) = t^k, \qquad \frac{df}{dt} = kt^{k-1} \tag{15.2}$$

(*b*) $f(t)$ es la suma de N funciones, $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_N(t)$:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N} f_n(t), \qquad \frac{df}{dt} = \sum_{n=1}^{N}\frac{df_n}{dt} \tag{15.3}$$

(*c*) $f(t)$ es un múltiplo constante de una función $g(t)$:

$$f(t) = kg(t), \qquad \frac{df}{dt} = k\frac{dg}{dt} \tag{15.4}$$

(*d*) $f(t)$ es un producto de dos funciones, g (t) y h (t):

$$f(t) = g(t)h(t), \qquad \frac{df}{dt} = g(t)\frac{dh}{dt} + \frac{dg}{dt}h(t) \tag{15.5}$$

(*e*) La función $f(t)$ tiene un valor máximo cuando $t = t_m$:

$$f(t_m) = \text{máximo}, \qquad \frac{df}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2f}{dt^2} < 0 \quad \text{en} \quad t = t_m \tag{15.6}$$

(*f*) La función exponencial, escrita e^t o exp (t) puede definirse mediante la serie:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

$$\frac{de^t}{dt} = e^t \tag{15.7}$$

(*g*) Las funciones seno y coseno pueden definirse mediante las series:

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots$$

$$\frac{d\operatorname{sen} t}{dt} = \cos t, \qquad \frac{d\cos t}{dt} = -\operatorname{sen} t \tag{15.8}$$

15.4 REGLA DE LA CADENA

Frecuentemente, sucede que la variable dependiente en una relación es la variable independiente en otra. Por ejemplo, la caída de presión (variable independiente) puede determinar una velocidad de flujo (variable dependiente), pero la velocidad de flujo, (variable independiente), determinará entonces una conversión en el reactor (variable dependiente). Por consiguiente, se tiene

función 1: g (t) función 2: $f(g)$

o $f(g(t))$. Ahora, cuando t cambia, esto modifica g que a su vez provoca un cambio en f. Es posible que se desee conocer la velocidad de cambio de f con t, df/dt. De la definición, ecuación 15.1:

$$\frac{df}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{límite}} \frac{f(g(t + \Delta t)) - f(g(t))}{\Delta t}$$

Es conveniente denotar $g(t + \Delta t)$ como $g + \Delta g$ y observar que Δg desaparece a medida que Δt tiende a cero. Entonces:

$$\frac{df}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{límite}} \frac{f(g + \Delta g) - f(g)}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{límite}} \frac{f(g + \Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta t} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt} \tag{15.9}$$

Esto se conoce como la *regla de la cadena de la diferenciación.*

Ejemplo 15.2

$$f(g) = e^{g(t)}, \qquad \frac{df}{dt} = e^{g(t)} \frac{dg}{dt}$$

Si, por ejemplo,

$$g(t) = kt^n, \qquad \frac{df}{dt} = e^{kt^n} \cdot nkt^{n-1}$$

La regla de la cadena es útil algunas veces para encontrar la derivada de una nueva función. Por ejemplo, el logaritmo natural, $\ln t$, puede definirse mediante la relación:

$$e^{\ln t} = t$$

La derivada del logaritmo puede encontrarse haciendo $g(t) = \ln t, f(g) = e^g$. Entonces:

$$\frac{df}{dt} = \frac{dt}{dt} = 1 = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt} = e^{\ln t} \cdot \frac{d \ln t}{dt} = t \frac{d \ln t}{dt}$$

ó

$$\frac{d \ln t}{dt} = \frac{1}{t} \tag{15.10}$$

15.5 INTEGRACION

Hasta aquí se ha tratado la diferenciación, el procedimiento para calcular la velocidad a la que algo ocurre. Algunas veces se conoce la velocidad a la que se realiza un proceso y se desea calcular la magnitud total del mismo. (¿Cuántas millas viaja un automóvil en tres horas a 60 mph ?) Si la velocidad es constante esto es fácil:

$$\text{total} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}.$$

Por supuesto, esta fórmula simple no es válida si la velocidad cambia con el tiempo, y entonces se requiere un esfuerzo más preciso.

Sea $f(t)$ la cantidad total en cualquier tiempo t. La cantidad acumulada entre los tiempos t_0 y t_N es entonces $f(t_N) - f(t_0)$. Note que:

$$f(t_N) - f(t_0) = [f(t_N) - f(t_{N-1})] + [f(t_{N-1}) - f(t_{N-2})] + \cdots + [f(t_1) - f(t_0)]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} [f(t_n) - f(t_{n-1})]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{[f(t_n) - f(t_{n-1})]}{t_n - t_{n-1}} [t_n - t_{n-1}]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta f}{\Delta t} \Delta t$$

Ahora, si t_N representa un valor fijo de t, entonces el valor del miembro izquierdo de esta ecuación no depende del número de incrementos en los cuales se divida el intervalo desde t_0 hasta t_N. A medida que aumenta el número de incrementos, Δt se hace pequeño y la relación $\Delta f/\Delta t$ se aproxima a la derivada df/dt. Por consiguiente, puede escribirse:

$$f(t_N) - f(t_0) = \underset{\Delta t \to 0}{\text{límite}} \sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot \Delta t \tag{15.11}$$

Este límite, llamado la *integral*, se representa mediante el símbolo $\int$, o la letra S que significa suma:

$$f(t_N) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_N} \frac{df}{dt} dt$$

Para simplificar la notación se denotará la función derivada df/dt, por el nombre $\phi(t)$ y se escribirá:

$$f(t_N) - f(t_0) = \int_{0}^{t_N} \phi(t)\, dt$$

La notación $\phi(t)\, dt$ se refiere a "todos los valores de la variable independiente entre t_0 y t_N", y podría escribirse también $\phi(\tau)\, d\tau$, $\phi(s)\, ds$, etc. El argumento es lo que se llama una "*variable muda*". Si t_N se refiere a cualquier tiempo, y se representa simplemente como t, entonces se tiene:

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(\tau)\, d\tau; \qquad \phi \equiv \frac{df}{dt} \tag{15.12}$$

para evitar confusión entre tiempo t, el "límite superior de la integral", y "todos los tiempos entre t_0 y t," la variable muda se ha representado como τ.

La mayor parte del desarrollo anterior ha estado relacionado a la nomenclatura, pero la ecuación 15.12 establece formalmente la relación entre la velocidad y la cantidad total. La *evaluación* de una integral es esencialmente una operación de antidiferenciación. Dada $\phi(t)$ se determina $f(t)$ conociendo cual función $f(t)$ tiene derivada $\phi(t)$. Por ejemplo, suponga $\phi(t) = t^n$. Se sabe que:

$$\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$$

Por consiguiente, si:

$$f(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \qquad \frac{df}{dt} = t^n$$

Entonces:

$$\int_{t_0}^{t} \phi(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \tau^n\, d\tau = f(t) - f(t_0)$$

$$= \frac{1}{n+1}\, t^{n+1} - \frac{1}{n+1}\, t_0^{n+1}$$

Algunas veces se utiliza la notación $f(\tau)\Big|_{t_0}^{t}$ en lugar de $f(t) - f(t_0)]$. En forma similar, puesto que:

$$\frac{de^{kt}}{dt} = ke^{kt}$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{k\tau}\, d\tau = \frac{1}{k}\, e^{kt} - \frac{1}{k}\, e^{kt_0}$$

Se dispone de tablas de integrales que incluyen un gran número de funciones. Para utilizar una tabla es importante distinguir entre integración definida e indefinida. La relación que se ha estado utilizando es la integral *definida:*

$$\int_{t_0}^{t} \phi(\tau)\, d\tau = f(t) - f(t_0)$$

La integral *indefinida* se escribe sin límites como:

$$\int \phi(\tau)\, d\tau = f(t) + \text{constante}$$

Por supuesto, la constante es simplemente $-f(t_0)$. Las tablas listan las integrales indefinidas y no incluyen la constante.

Las siguientes relaciones se deducen directamente del desarrollo anterior:

(*a*) $$\int_{t_0}^{t} [\phi(\tau) + \psi(\tau)]\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \phi(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau \qquad (15.13)$$

(*b*) $$\int_{t_0}^{t} a\phi(\tau)\, d\tau = a \int_{t_0}^{t} \phi(\tau)\, d\tau \qquad (15.14)$$

(*c*) $$\int_{t_0}^{t} \phi(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \phi(\tau)\, d\tau + \int_{t_1}^{t} \phi(\tau)\, d\tau \qquad (15.15)$$

(*d*) Las funciones $f(t)$ y $g(t)$ tienen derivadas $f'(t)$ y $g'(t)$, respectivamente. Entonces:

$$\int_{t_0}^{t} f(\tau)g'(\tau)\, d\tau = f(t)g(t) - f(t_0)g(t_0) - \int_{t_0}^{t} f'(\tau)g(\tau)\, d\tau \qquad (15.16)$$

Esta última relación se conoce como *integración por partes.*

Ejemplo 15.3

$$\phi(t) = te^{kt}$$

Sea

$$f(t) = t, \qquad f'(t) = 1; \qquad g(t) = \frac{1}{k} e^{kt}, \qquad g'(t) = e^{kt}$$

$$\phi(t) = f(t)g'(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \phi(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \tau e^{k\tau}\, d\tau = \frac{1}{k} te^{kt} - \frac{1}{k} t_0 e^{kt_0} - \int_{t_0}^{t} \frac{1}{k} e^{k\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{k} te^{kt} - \frac{1}{k} t_0 e^{kt_0} - \frac{1}{k^2} e^{kt} + \frac{1}{k^2} e^{kt_0}$$

15.6 AREA E INTEGRACION NUMERICA

La integral puede tener un significado geométrico simple si se considera nuevamente la definición de la ecuación 15.11. Observe la función $\phi(t)$ graficada en la figura 15.5. El cociente de las diferencias de $\Delta f/\Delta t$ es una aproximación constante a $\phi(t)$ en el intervalo Δt (ecuación 15.1), de manera que es posible trazar, sobre la misma gráfica las líneas $\Delta f/\Delta t$, que forman la función de escalera mostrada en la figura 15.5. Ahora, $\Delta f/\Delta t$ (altura) $\times$ Δt (base) es simplemente el área de un rectángulo, de manera, que $\sum [\Delta f/\Delta t]\, \Delta t$ es el área bajo la función de escalera. A medida que Δt se hace más pequeño, el número de rectángulos aumenta y la función de escalera se aproxima cada vez más a la función $\phi(t)$. *La integral*, el límite de esta idea, *es entonces el área bajo la curva* $\phi(t)$. Aunque formalizados por Leibniz, estos principios datan en parte desde Arquímedes.

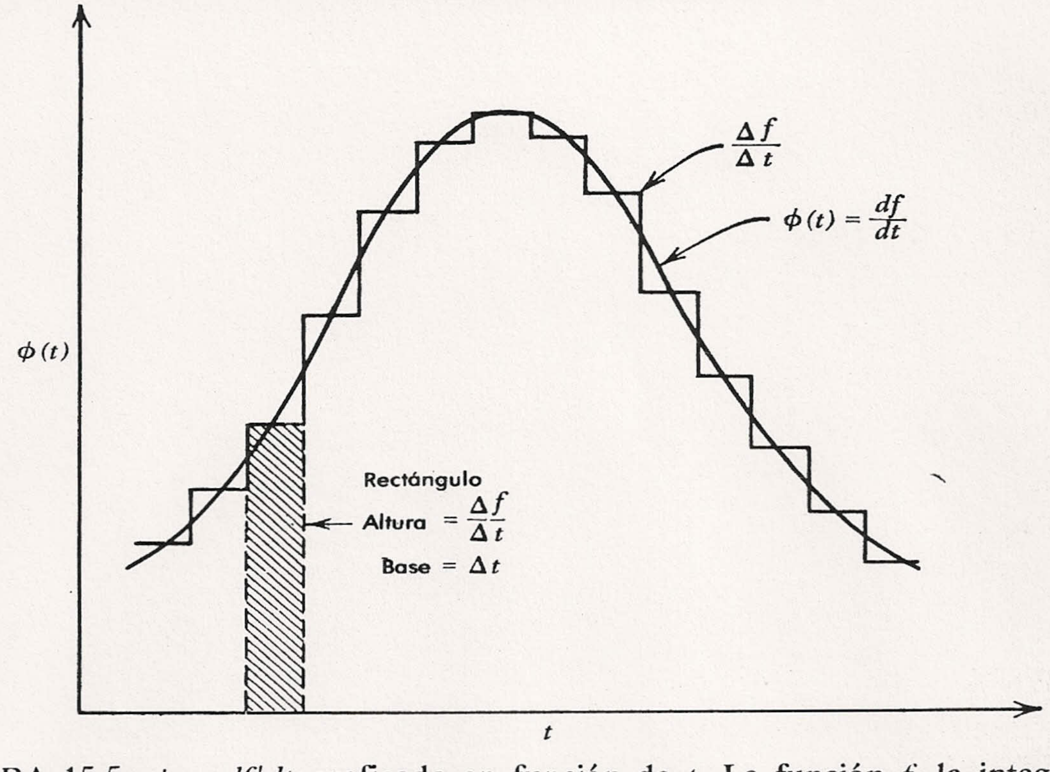


FIGURA 15.5 $\phi = df/dt$ graficada en función de t. La función f, la integral de df/dt, es el área bajo la curva.

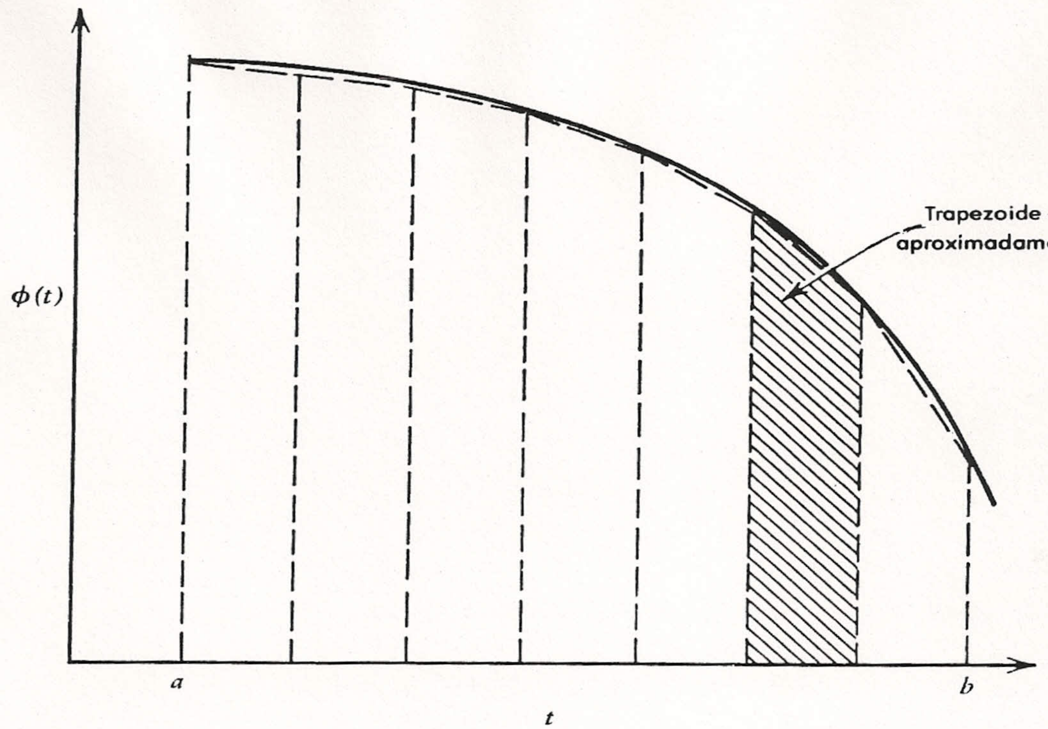


FIGURA 15.6 Cálculo aproximado del área bajo la curva mediante trapezoides de área casi igual.

No siempre es posible encontrar una función simple $f(t)$ para una derivada dada $\phi(t)$. Utilizando el conocimiento de la integral como un área, es posible, sin embargo, obtener los valores numéricos de las integrales. Considere la figura 15.6. El área que está bajo la curva $\phi(t)$ entre a y b es similar al área que se encuentra bajo los trapezoides. Por consiguiente:

$$\int_a^b \phi(t)\,dt \approx \sum_{N\ \text{trapezoides}} (\text{Altura promedio}) \times \Delta t$$

Para el trapezoide entre t_{n-1} y t_n, la altura promedio $= [\phi(t_{n-1}) + \phi(t_n)]/2$, mientras que $\Delta t = [b - a]/N$. Por consiguiente:

$$\int_a^b \phi(t)\,dt \approx \frac{b-a}{N}\{\tfrac{1}{2}[\phi(a) + \phi(t_1)]$$

$$+ \tfrac{1}{2}[\phi(t_1) + \phi(t_2)] + \cdots + \tfrac{1}{2}[\phi(t_{N-1}) + \phi(b)]\}$$

$$= \frac{b-a}{N}\left[\tfrac{1}{2}\phi(a) + \sum_{n=1}^{N-1}\phi(t_n) + \tfrac{1}{2}\phi(b)\right] \quad (15.17)$$

La ecuación 15.17 se conoce como la *regla trapezoidal*. Se dispone de ecuaciones más exactas, pero la regla trapezoidal es adecuada para el presente texto.

Ejemplo 15.4

Evalúe $\int_0^3 e^t\,dt$; $a = 0$, $b = 3$, $\phi(t) = e^t$

(*a*) analítico : $\int_0^3 e^t\,dt = e^3 - e^0 = 19.086$

(*b*) regla del trapezoide:

(i) $N = 2$; tres puntos , $a = 0$, $t_1 = 1.5$, $b = 3$

$$\int_0^3 e^t\,dt \approx \tfrac{3}{2}[\tfrac{1}{2}e^0 + e^{1.5} + \tfrac{1}{2}e^3]$$

$$= \tfrac{3}{2}[\tfrac{1}{2} \times 1 + 4.48 + \tfrac{1}{2} \times 20.09] = 22.54$$

(ii) $N = 4$; cinco puntos $a = 0$, $t_1 = 0.75$, $t_2 = 1.5$, $t_3 = 2.25$, $b = 3.0$

$$\int_0^3 e^t\,dt \approx \tfrac{3}{2}[\tfrac{1}{2}e^0 + e^{0.75} + e^{1.50} + e^{2.25} + \tfrac{1}{2}e^3]$$

$$= \tfrac{3}{4}[\tfrac{1}{2} \times 1 + 2.12 + 4.48 + 9.49 + \tfrac{1}{2} \times 20.09] = 19.98$$

(iii) $N = 6$; siete puntos , $a = 0$, $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1.0$, $t_3 = 1.5$, $t_4 = 2.0$, $t_5 = 2.5$, $b = 3$

$$\int_0^3 e^t\,dt \approx \tfrac{3}{6}[\tfrac{1}{2}e^0 + e^{0.5} + e^{1.0} + e^{1.5} + e^{2.0} + e^{2.5} + \tfrac{1}{2}e^{3.0}]$$

$$= \tfrac{3}{6}[\tfrac{1}{2} \times 1.0 + 1.65 + 2.72 + 4.48 + 7.39 + 12.18 + \tfrac{1}{2} \times 20.09]$$

$$= 19.48$$

```
C     INTEGRACION MEDIANTE LA REGLA DEL TRAPEZOIDE
C     ESTE PROGRAMA ESTA ESCRITO EN LENGUAJE FORTRAN IV Y SE
C     CORRIO EN UNA COMPUTADORA XDS9300
      LEER (105, 999) A, B, N
  999 FORMATO (2F10.0, 15)
      M =  N - 1
      X = 0.0
      SUM = 0.0
      DO 10  I = 1,M
      RN  = N
      X = X + ( B - A )/RN
   10 SUM = SUM + Y ( X )
      AREA = ( B - A ) * ( SUM + 0.5 * ( Y ( A ) + Y ( B ) ) )/RN
      ESCRIBIR ( 108, 998 ) AREA
  998 FORMATO ( 21H VALOR DE LA INTEGRAL = E10.4 )
      LLAMAR SALIDA
      FIN
      FUNCION Y ( X )
C     INSERTAR FUNCION EN CUESTION EN LA SIGUIENTE TARJETA
      Y = E x P ( X )
      REGRESAR
      FIN
C     DATOS DEL EJEMPLO 15.4
      0.0         3.0         6
```

FIGURA 15.7 Programa en Fortran IV para la integración númerica, utilizando la regla del trapezoide.

Evidentemente, a medida que aumenta el número de términos, el valor numérico estimado con la regla del trapezoide se hace cada vez más cercano al valor exacto. La figura 15.7 es un programa para integración escrito en Fortran IV que utiliza la regla del trapezoide. Los datos son para el ejercicio 15.4.

15.7 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

La interpretación de la integral como área, conduce directamente a un resultado que se conoce *teorema del valor medio.* La figura 15.8 ilustra el caso. Debe existir un rectángulo con base $b-a$ que tenga la misma área que la que se encuentra debajo de la curva de la función $\phi(t)$ entre a y b. Más aún, es evidente que la altura del rectángulo es mayor que el valor mínimo de $\phi(t)$ y menor que el máximo. Si $\phi(t)$ es continua en el intervalo $a \leq t \leq b$ entonces $\phi(t)$ debe comprender todos los valores entre este máximo y este mínimo. Por consiguiente, la altura del rectángulo debe corresponder al valor de $\phi(t)$ en algún punto, por ejemplo $\bar{t}$, entre a y b. O sea:

$$\phi \text{ continua}: \int_a^b \phi(t)\,dt = \phi(\bar{t})[b-a], \qquad a \leq \bar{t} \leq b \tag{15.18}$$

Si ϕ representa masa y t posición, entonces en mecánica, el punto $\bar{t}$ se conoce como el centro de masa, o centro de gravedad.

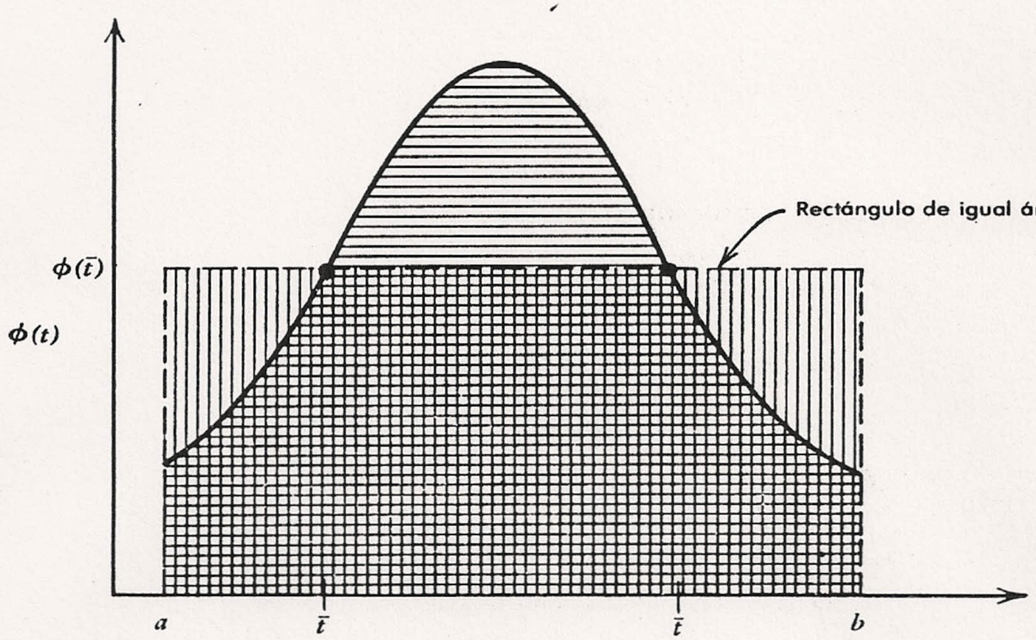


FIGURA 15.8 Interpretación geométrica del teorema del valor medio. Hay un rectángulo con base b-a que tiene la misma área que la función $\phi(t)$.

15.8 TEOREMA DE TAYLOR

El teorema de Taylor es una consecuencia directa del teorema del valor medio que permite estimar el valor de una función en un punto, a partir de su valor y comportamiento en otro. Probablemente, es el teorema que se utiliza más frecuentemente en aplicaciones de cálculo. El teorema establece que, si se conoce el valor de una función y sus primeras n derivadas a $t = t_0$, entonces es posible estimar el valor de la función en otras partes con un error que es aproximadamente $(t - t_0)^{n+1}$.

Al desarrollar el teorema de Taylor se utilizará como ejemplo el caso $t_0 = 0$ y $n = 2$. El caso general, que se enunciará y utilizará, se obtiene en la misma forma, pero realizando más cálculos. La función $f(t)$ se expresará como una serie de potencias en t con un término de error, el error representa la diferencia existente entre la función exacta a cualquier valor de t y la serie:

$$f(t) = f_0 + f_1 t + e(t)$$

Aquí f_0 y f_1 son constantes y $e(t)$ es una función que es cero cuando $t = 0$ y tiene una derivada, $e'(t)$, que es tambien cero cuando $t = 0$. Con $t = 0$ se encuentra que:

$$f(0) = f_0$$

Tomando la derivada de $f(t)$, se tiene:

$$f'(t) = f_1 + e'(t)$$

y haciendo t igual a cero, se obtiene:

$$f_1 = f'(0)$$

La segunda derivada es:

$$f''(t) = e''(t)$$

y, como en la definición de una integral,

$$f''(t) = f''(0) + \int_0^t f'''(\tau)\, d\tau$$

es posible aplicar el teorema del valor medio, obteniendo:

$$e''(t) = f''(t) = f''(0) + f'''(\bar{t})t, \qquad 0 \leq \bar{t} \leq t$$

Note que $f''(0)$ y $f'''(\bar{t})$ son constantes. Entonces:

$$e'(t) = \int_0^t e''(\tau)\, d\tau = f''(0)t + \tfrac{1}{2}f'''(\bar{t})t^2$$

$$e(t) = \int_0^t e'(\tau)\, d\tau = \tfrac{1}{2}f''(0)t^2 + \tfrac{1}{6}f'''(\bar{t})t^3$$

La función $f(t)$ puede escribirse:

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \tfrac{1}{2}f''(0)t^2 + \tfrac{1}{6}f'''(\bar{t})t^3$$

O sea, dado el valor de la función y sus primeras dos derivadas a $t = 0$, puede calcularse la función a otros valores de t dentro de un término proporcional a t^3. Por supuesto, para t pequeño t^3 es despreciable.

La relación general para cualquier n y cualquier punto t_0 es:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2!} f''(t_0)[t - t_0]^2$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t_0)[t - t_0]^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{t})[t - t_0]^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} [t - t_0]^k + \frac{f^{(k+1)}(\bar{t})}{(k+1)!} [t - t_0]^{k+1}, \qquad t_0 \leq \bar{t} \leq t \tag{15.19}$$

Geométricamente, esto es simplemente una afirmación que en la vecindad de un punto t_0 una función puede aproximarse a varios niveles de exactitud utilizando la figura (15.9):

(*a*) una constante, $f(t) \approx f(t_0)$

(*b*) una línea recta, tangente al punto t_0:

$$f(t) \approx f(t_0) + f'(t_0)[t - t_0]$$

(*c*) una parábola, tangente a t_0 con la misma curvatura que la función:

$$f(t) \approx f(t_0) + f'(t_0)[t - t_0] + \tfrac{1}{2} f''(t_0)[t - t_0]^2$$

y así sucesivamente. El término evaluado entre t_0 y t da una estimación del error implicado en el cálculo aproximado.

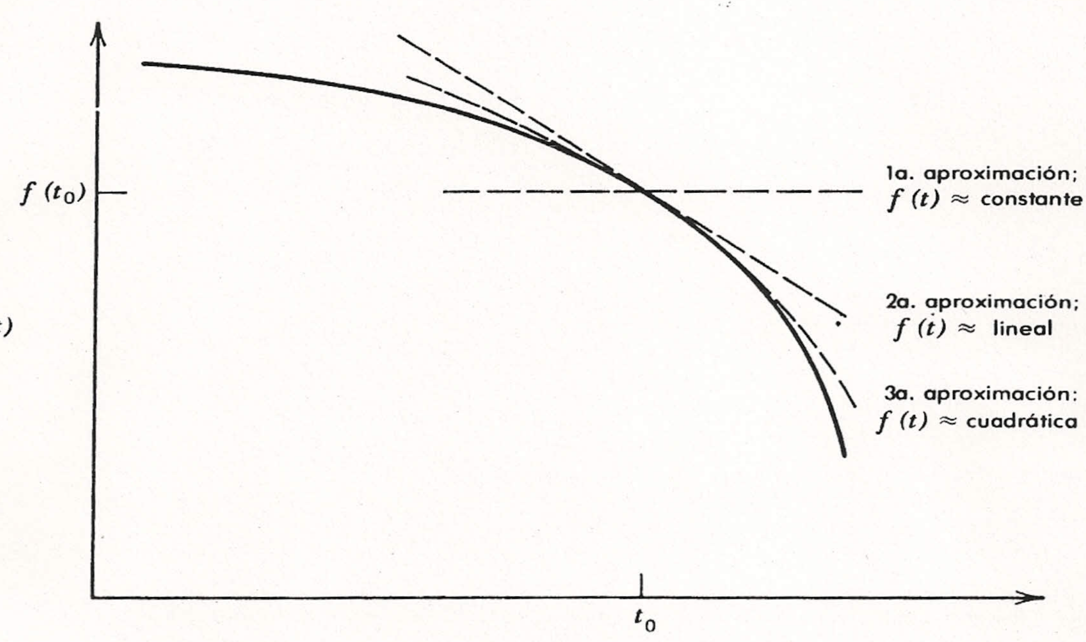


FIGURA 15.9 Varios niveles de aproximación a la función $f(t)$ cerca de $t = t_0$.

Ejemplo 15.5

Calcule la serie de Taylor de tres términos cuando e^t alrededor de $t = 0$ y estime la exactitud para $0 \leq t \leq 1$

$$f(t) = e^t, \qquad f'(t) = e^t, \qquad f''(t) = e^t, \qquad f'''(t) = e^t$$

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 1$$

$$e^t = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}e^{\bar{t}} \cdot t^3$$

El término de error $\frac{1}{6}e^{\bar{t}} \cdot t^3$, siempre es positivo y está limitado en $0 \leq t \leq 1$ por $(e/6)t^3$. Por consiguiente, a cualquier t, $0 \leq t \leq 1$

$$1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 \leq e^t \leq 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \frac{e}{6}t^3$$

A $t = 0.5$, entonces $1.625 \leq e^{0.5} \leq 1.681$, y el valor real es aproximadamente 1.649.

15.9 ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES

Algunas veces se tiene un caso en el que existe una integral $\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$, en donde el límite superior, x, es una función de una variable independiente, t, y se desea calcular la velocidad del cambio del valor de la integral a medida que t cambia. Entonces:

$$\frac{d\left[\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi\right]}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{límite}} \frac{\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi - \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi}{\Delta t}$$

$$= (\text{de la ecuación } 15.15) \underset{\Delta t \to 0}{\text{límite}} \frac{\int_{x}^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi}{\Delta t}$$

$$= (\text{de la ecuación } 15.18) \underset{\Delta t \to 0}{\text{límite}}\, f(\bar{x})\frac{\Delta x}{\Delta t} = f(x)\frac{dx}{dt} \tag{15.20}$$

donde el último paso se deduce del hecho de que si $x \leq \bar{x} \leq x + \Delta x$ y a medida que $\Delta t \to 0, x + \Delta x \to x$ al igual que cualquier punto en medio del intervalo.

Una *ecuación diferencial* es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas. Una *ecuación diferencial de primer orden* incluye solamente la primera derivada. Si x es una función de t, entonces la ecuación de primer orden puede escribirse como:

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t), t) \tag{15.21}$$

O sea, la velocidad de cambio de x depende tanto de t como del valor de x misma a t. Note que para calcular x en función de t se requiere integrar, de manera, que debe conocerse x a algún valor de t para calcular la constante de integración.

Una ecuación de primer orden es *separable* si puede arreglarse en la forma:

$$f(x)\frac{dx}{dt} = g(t) \tag{15.22}$$

O sea, separarse en "términos de x" a la izquierda y "términos de t" a la derecha; entonces de la ecuación 15.20 se deduce la solución para la ecuación 15.22 que puede reescribirse:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi\right] = g(t)$$

El miembro izquierdo es una derivada, de manera, que integrando se obtiene:

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \tag{15.23}$$

Aquí t_0 es el tiempo en el cual x tiene el valor x_0.

Ejemplo 15.6

$$\frac{dx}{dt} = kx, \; x = x_0 \text{ en } t = t_0$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = k$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{t_0}^{t} k\, d\tau = \ln\frac{x_0}{x} = k[t - t_0]$$

$$x = x_0 e^{k[t-t_0]}$$

Ejemplo 15.7

$$\frac{dx}{dt} = -kx^n, \qquad n \neq 1, \qquad x = x_0 \text{ en } t = t_0$$

$$\frac{1}{x^n}\frac{dx}{dt} = -k$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi^n} = \int_{t_0}^{t} k\, d\tau = \frac{x^{1-n}}{1-n} - \frac{x_0^{1-n}}{1-n} = -k[t - t_0]$$

$$x = \{x_0^{1-n} - k[1-n][t - t_0]\}^{1/[1-n]}$$

Ejemplo 15.8

$$\frac{dx}{dt} = -kx^n t^m, \qquad n \neq 1, \qquad m \neq 1, \qquad x = x_0 \text{ en } t = t_0$$

$$\frac{1}{x^n}\frac{dx}{dt} = -kt^m$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi^n} = -\int_{t_0}^{t} k\tau^m \, d\tau = \frac{x^{1-n}}{1-n} - \frac{x_0^{1-n}}{1-n} = -\frac{kt^{m+1}}{m+1} + \frac{kt_0^{m+1}}{m+1}$$

$$x = \left\{x_0^{1-n} - k\frac{1-n}{1+m}[t^{1+m} - t_0^{1+m}]\right\}^{1/[1-n]}$$

La ecuación 15.22 se separa algunas veces en la forma abreviada:

$$f(x)\,dx = g(t)\,dt$$

Esta ecuación no tiene significado, pero si se integra entre los límites correctos, claramente se obtiene la respuesta correcta.

15.10 ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = b(t), \qquad x = x_0 \text{ en } t = t_0 \tag{15.24}$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones de t, se presenta a menudo en algunas aplicaciones. Esta ecuación no se puede separar, pero utilizando un artificio puede lograrse. Escriba de nuevo la ecuación:

$$R(t)\frac{dx}{dt} = -R(t)a(t)x + R(t)b(t)$$

$$= \frac{d}{dt}Rx - \frac{dR}{dt}x$$

La relación a la derecha se deduce de la regla del producto, ecuación 15.15. Si $R(t)$ satisface la ecuación separable

$$\frac{dR}{dt} = a(t)R$$

ó

$$R(t) = R(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right)$$

entonces, solamente permanece:

$$\frac{d}{dt}Rx = R(t)b(t)$$

El miembro izquierdo es una derivada, de manera que puede integrarse para obtener

$$R(t)x(t) - R(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t} R(\sigma)b(\sigma)\,d\sigma$$

Note que cuando $R(t_0) \neq 0$ se cancela después de substituir de $R\ (t)$ y resta:

$$x = x_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right)$$
$$+ \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right) \int_{t_0}^{t} \exp\left(+\int_{t_0}^{\sigma} a(\tau)\,d\tau\right) b(\sigma)\,d\sigma \qquad (15.25)$$

Esto se simplifica ligeramente, tomando en cuenta que t es una constante en lo que se refiere a la integración sobre σ de manera que $\exp\ [-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau]$ puede introducirse en la integral. Entonces:

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right) \exp\left(+\int_{t_0}^{\sigma} a(\tau)\,d\tau\right)$$
$$= \exp\left(-\left[\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau - \int_{t_0}^{\sigma} a(\tau)\,d\tau\right]\right) = \exp\left(-\int_{\sigma}^{t} a(\tau)\,d\tau\right)$$

Por consiguiente:

$$x = x_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{\sigma}^{t} a(\tau)\,d\tau\right) b(\sigma)\,d\sigma \qquad (15.26)$$

Ejemplo 15.9

$$\frac{dx}{dt} + kx = b(t), \qquad k = \text{constante} \qquad x = x_0 \quad \text{en} \quad t = t_0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} k\,d\tau = k[t_2 - t_1]$$

$$x = x_0 e^{-k[t-t_0]} + \int_{t_0}^{t} e^{-k[t-\sigma]} b(\sigma)\,d\sigma$$

$$x = x_0^{-k[t-t_0]} + e^{-kt} \int_{t_0}^{t} e^{k\sigma} b(\sigma)\,d\sigma$$

15.11 DERIVADA PARCIAL

Un problema puede tener dos variables independientes, por ejemplo, espacio y tiempo, o más de dos. Una función de dos variables se denota como $f(x, y)$. Se desea calcular la forma en que varía f a medida que varían x y y.

Si una variable queda fija en un valor constante, por ejemplo $y = y^*$, entonces $f(x, y)$ depende realmente de una sola variable, x, y la derivada puede calcularse como:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{límite}} \frac{f(x + \Delta x, y^*) - f(x, y^*)}{\Delta x}$$

En forma similar, si x está fija en x^* la derivada es:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x^*, y + \Delta y) - f(x^*, y)}{\Delta y}$$

Estas derivadas se denominan derivadas parciales con respecto a x (o y) manteniendo y (o x) constante, y se denotan por una "letra" ∂d:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=y^*} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{límite}} \frac{f(x + \Delta x, y^*) - f(x, y^*)}{\Delta x} \tag{15.27a}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=x^*} = \underset{\Delta y \to 0}{\text{límite}} \frac{f(x^*, y + \Delta y) - f(x^*, y)}{\Delta y} \tag{15.27b}$$

Las derivadas parciales se calculan en la misma forma que las derivadas ordinarias.

Ejemplo 15.10

$$f(x, y) = x^2 e^{ky}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=\text{constante}} = 2xe^{ky} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=\text{constante}} = kx^2e^{ky}$$

La *segunda derivada parcial* se calcula en forma análoga:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2e^{ky} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = k^2x^2e^{ky}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2kxe^{ky} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2kxe^{ky}$$

Note que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

15.12 REGLA DE LA CADENA

La regla de la cadena puede extenderse a funciones de más de una variable. En esta obra, es suficiente considerar el caso especial de una función de varias variables, por ejemplo, $f(x, y)$ donde x y y dependen cada una de una sola variable, t. Se desea calcular la velocidad del cambio de f con respecto a t. Ahora bien partiendo de la definición de derivada:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \underset{\Delta t \to 0}{\text{límite}} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} \\ &= \underset{\Delta t \to 0}{\text{límite}} \left\{ \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t + \Delta t), y(t))}{\Delta t} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{f(x(t + \Delta t), y(t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} \right\} \\ &= \underset{\Delta t \to 0}{\text{límite}} \left\{ \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right.\end{aligned}$$

$$+\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}\Bigg\}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

Las funciones $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se evalúan para cada t en los valores $x(t)$ y $y(t)$. La etapa final en la derivación, utiliza el hecho de que el $\lim\limits_{\Delta t \to 0} x + \Delta x = x$. El resultado general cuando f depende de n funciones de t, $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ es:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} \tag{15.28}$$

Ejemplo 15.11

$$f(x, y)=x^2e^{ky}$$

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2xe^{ky}\frac{dx}{dt}+kx^2e^{ky}\frac{dy}{dt}$$

Sea

$$x(t)=t^n, \qquad y(t)=\ln t; \qquad \frac{dx}{dt}=nt^{n-1}, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}$$

$$\frac{df}{dt}=2xe^{ky}nt^{n-1}+kx^2e^{ky}t^{-1}$$

$$=2t^ne^{k\ln t}nt^{n-1}+kt^{2n}e^{k\ln t}t^{-1}$$

$$=2nt^{k+2n-1}+kt^{k+2n-1}=[k+2n]t^{k+2n-1}$$