PARTE II

Sistemas isotérmicos

CAPITULO 4

Sistemas líquidos que no reaccionan

4.1 INTRODUCCION

Mediante un ejemplo sencillo se han bosquejado los conceptos básicos del análisis y se ha ilustrado la base de la etapa de desarrollo del modelo, a través del estudio de la fuente de las ecuaciones del modelo. Lo que resta de este libro se dedica a ilustrar las aplicaciones de los principios del análisis en distintos casos. Se empezará enfatizando la etapa de desarrollo del modelo con aplicaciones sencillas de la ley de la conservación de la masa. Aumentando gradualmente la complejidad del problema se ilustrará con cierto detalle cómo se introducen los procesos lógicos a los diversos diagramas utilizados en el capítulo 3. Aunque en estos capítulos iniciales se dará mayor énfasis a la etapa de desarrollo del modelo, también se recordará todo el proceso del análisis, indicando el uso en ingeniería de los desarrollos del modelo.

4.2 UN BALANCE DE MASA SENCILLO

Utilizaremos el problema más simple, es decir, el llenado y vaciado de un tanque cilíndrico. El tanque se ilustra en la figura 4.1. Se llena a una velocidad constante de q_f ft^3/ min, y se vacía con una bomba, también a una velocidad constante de q ft^3/min; el tanque tiene una área seccional de A ft^2, y un nivel líquido de h ft. La densidad del líquido es ρ lb$_m$/ft^3. (Antes de proseguir es conveniente considerar si se puede deducir una relación exclusivamente sobre bases intuitivas, que muestre a h como una función de t. Note que la ecuación elemental para h como una función de t, obtenida de esta manera, depende de que q y q_f sean constantes. Trate de establecer el procedimiento para derivar la relación, y piense cómo aplicar el mismo para problemas más complicados.)

Evidentemente, la variable fundamental de interés es la masa, y el lógico control de volumen es el tanque. Fijada la densidad, la masa queda definida completamente por la altura del líquido que se halla en el tanque. De esta manera, se observan las siguientes identidades entre las variables fundamentales y las características:

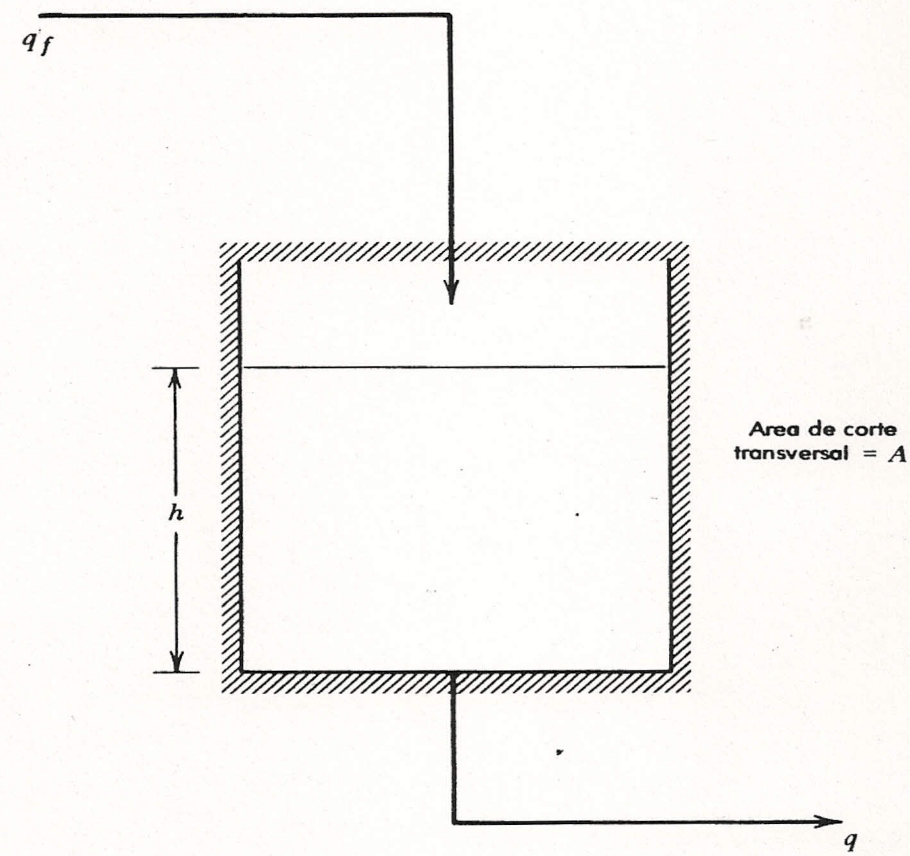


FIGURA 4.1 Llenado de un tanque con una velocidad de flujo volumétrico q_f y vaciado a una velocidad q.

$$\text{masa en el tanque en cualquier tiempo } t = \rho A h(t)$$

$$\mathrm{lb_m} = \left[\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{ft^3}}\right][\mathrm{ft^2}][\mathrm{ft}]$$

masa que entró entre el tiempo t
y un poco tiempo después, $t + \Delta t = \rho q_f \Delta t$

$$\mathrm{lb_m} = \left[\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{ft^3}}\right]\left[\frac{\mathrm{ft^3}}{\mathrm{min}}\right][\mathrm{min}]$$

masa que salió entre t y $t + \Delta t = \rho q\, \Delta t$

$$\mathrm{lb_m} = \left[\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{ft^3}}\right]\left[\frac{\mathrm{ft^3}}{\mathrm{min}}\right][\mathrm{min}]$$

El principio de la conservación de la masa, aplicado al volumen de control del tanque, es entonces

$$\left\{\begin{array}{l}\text{masa en el tanque}\\ \text{en el tiempo } t+\Delta t\\ \rho A h(t+\Delta t)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{masa en el tanque}\\ \text{en el tiempo } t\\ \rho A h(t)\end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\text{masa que entró}\\ \text{entre } t \text{ y } t+\Delta t\\ \rho q\,\Delta t\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{masa que salió entre}\\ t \text{ y } t+\Delta t\\ \rho q_f\,\Delta t\end{array}\right\}$$

Dividiendo entre ρA

$$h(t+\Delta t) = h(t) + \frac{1}{A}[q_f - q]\,\Delta t \tag{4.1}$$

Dado que q y q_f son constantes en este caso, la ecuación 4.1 es válida para cualquier valor de Δt, aun cuando éste no sea menor. De esta manera, si t_0 se refiere al tiempo en que se comienza a llenar el tanque, y t se refiere a cualquier tiempo posterior se tiene que:

$$h(t) = h(t_0) + \frac{1}{A}[q_f - q][t - t_0] \tag{4.2}$$

La ecuación 4.2 es una relación algebraica que permite obtener la altura del líquido en el tanque para cualquier tiempo, $h(t)$; suponiendo que se conoce el área del tanque, A; las velocidades de flujo que entra y sale del tanque q_f y q; el intervalo de tiempo $t - t_0$; y la altura del líquido a t_0, $h(t_0)$. *La limitación de la ecuación 4.2 consiste en que q_f y q, deben ser constantes en el intervalo de tiempo $t - t_0$.* Se puede ilustrar el caso más importante en que q_f y q varían con el tiempo con el siguiente planteamiento:

velocidad a que sale la masa $= \rho q$

$$\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{min}} = \left[\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{ft^3}}\right]\left[\frac{\mathrm{ft^3}}{\mathrm{min}}\right]$$

Sobre un intervalo de tiempo muy pequeño Δt se puede considerar q como esencialmente constante.

Observe los desarrollos paralelos en el cálculo efectuado en el capítulo 15,

de esta manera la cantidad que sale es $= \rho q\,\Delta t$

en un intervalo pequeño de tiempo Δt

$$\mathrm{lb_m} = \left[\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{ft^3}}\right]\left[\frac{\mathrm{ft^3}}{\mathrm{min}}\right][\mathrm{min}]$$

$$\begin{array}{lcl} \text{masa total que sale entre} & = \text{suma de todos los} & = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \rho q(t)\,dt \\ \text{los tiempos } t_1 \text{ y } t_2 & \text{intervalos de tiempo} & \end{array}$$

Asimismo,

$$\begin{array}{l} \text{masa total que entra} \\ \text{entre } t_1 \text{ y } t_2 \end{array} = \int_{t_1}^{t_2} \rho q_f(t)\,dt$$

De esta manera, aplicando a este problema la ley de la conservación de la masa se tiene:

$$\rho A h(t_2) = \rho A h(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \rho q_f(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} \rho q(t)\,dt$$

o, dado que ρ es una constante:

$$h(t_2) = h(t_1) + \frac{1}{A}\int_{t_1}^{t_2} [q_f(t) - q(t)]\,dt \tag{4.3}$$

El "nombre" de la integración variable no es significativo y para evitar confusiones futuras se denominará τ en lugar de t:

$$h(t_2) = h(t_1) + \frac{1}{A}\int_{t_1}^{t_2} [q_f(\tau) - q(\tau)]\,d\tau \tag{4.4}$$

La ecuación 4.4, escrita para velocidades variables de flujo cuando éste entra o sale del tanque, puede utilizarse para calcular h, si q_f y q son funciones conocidas de la variable independiente, es decir, del tiempo. No obstante, se observó en el capítulo 2, que se puede tener q disponible, sólo como una función de h, y *para este caso la ecuación 4.4 no es útil.* Se puede mostrar una importante manipulación en la elaboración del modelo y revisar algunos conceptos básicos del cálculo al volver a escribir la ecuación 4.4, para el caso en que se tenga interés en los tiempos t y $t + \Delta t$:

$$h(t + \Delta t) - h(t) = \frac{1}{A}\int_{t}^{t+\Delta t} [q_f(\tau) - q(\tau)]\,d\tau$$

Aplicando el teorema del valor medio al miembro de la derecha se tiene:

$$h(t + \Delta t) - h(t) = \frac{1}{A}\,[\overline{q_f - q}]\,\Delta t$$

donde $\overline{q_f - q}$, representa un valor promedio en algún punto entre t y $t + \Delta t$. Esto constituye simplemente la ecuación 4.1, excepto que ahora se ha tenido el cuidado de hacer notar que las velocidades de flujo son valores promedio para intervalos cortos de tiempo Δt. Entonces:

$$\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}=\frac{1}{A}\,[\overline{q_f-q}]$$

En el límite, cuando $\Delta t \to 0$, el miembro izquierdo de la ecuación es la derivada, dh/dt, mientras que el miembro derecho $\overline{q_f - q}$ se convierte simplemente en $\overline{q_f - q}$, evaluado en el tiempo t, dado que todos los puntos entre t y $t + \Delta t$ se reducen a t. De esta manera:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{A}\,[q_f-q] \tag{4.5}$$

y, dado que t es un tiempo arbitrario, la ecuación 4.5 se mantiene para todos los tiempos.

Si se vuelve a multiplicar cada miembro de la ecuación 4.5 por ρA, la relación con el principio conservador es más claro:

$$\frac{d}{dt}\,[\rho A h]=\rho q_f-\rho q \tag{4.6}$$

$$\left[\frac{1}{\text{min}}\right]\left[\frac{\text{lb}_\text{m}}{\text{ft}^3}\right][\text{ft}^2][\text{ft}]=\left[\frac{\text{lb}_\text{m}}{\text{ft}^3}\right]\left[\frac{\text{ft}^3}{\text{min}}\right]-\left[\frac{\text{lb}_\text{m}}{\text{ft}^3}\right]\left[\frac{\text{ft}^3}{\text{min}}\right]$$

$$\frac{\text{lb}_\text{m}}{\text{min}}=\frac{\text{lb}_\text{m}}{\text{min}}$$

El miembro izquierdo de la ecuación es la velocidad de cambio de la masa en el tanque, mientras que el derecho es la velocidad neta en el flujo de masa.

Resumiendo las etapas que se siguieron para llegar a esta ecuación:

1. El enunciado de la ley de la conservación de la masa se expresó mediante símbolos utilizando las variables características del problema (ecuaciones 4.1 y 4.3). Se demostró el concepto de la relación integral para representar la masa que entra y sale del sistema.
2. Se reordenó la ecuación que representa la ley de la conservación, de tal manera que el miembro derecho incluyera el cambio que sufren las variables características de interés (h en este caso) dividido entre el cambio registrado en la variable independiente.
3. Se aplicó el teorema del valor medio.
4. Se tomó el límite cuando Δt se aproxima a cero, y se expresó la ecuación final del modelo en forma de derivada.

Si q_f y q son constantes, esta situación física simple nos sirve para ilustrar claramente las etapas detalladas en el desarrollo del modelo, según se muestra en la figura 3.1. Solamente fue necesaria una ley de la conservación, y el tiempo la única variable independiente de importancia;

no se requirió utilizar una relación básica. Al cambiar la entructura del tanque se puede demostrar cómo puede utilizarse una relación básica simple a partir de una consideración geométrica.

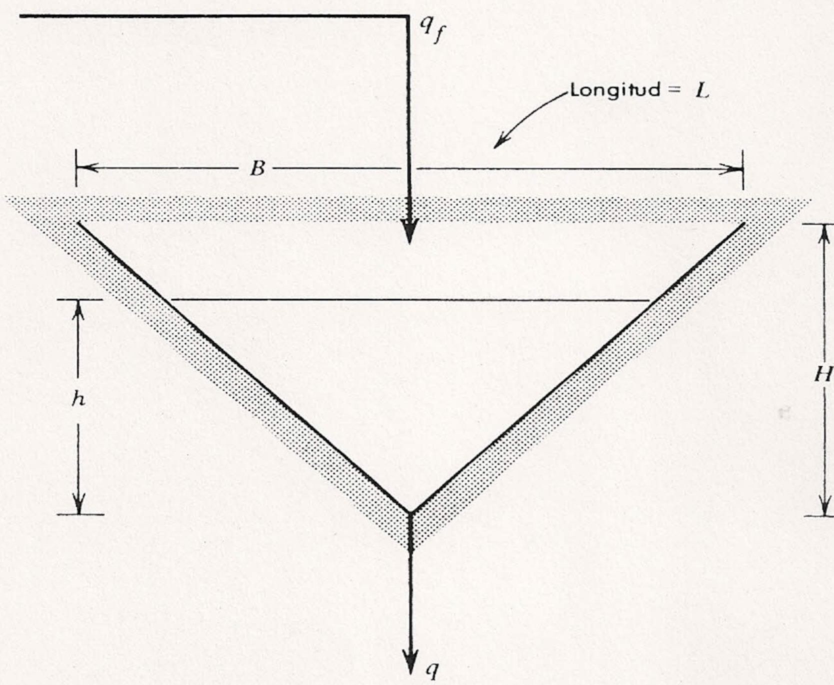


FIGURA 4.2 Llenado de un tanque con forma de cuña a una velocidad de flujo volumétrico q_f, y vaciado a una velocidad q.

Ahora se considerará un tanque en forma de cuña de altura total H, grosor B, y longitud L (figura 4.2). Las velocidades de flujo que entra y sale del tanque se representan de nuevo con q_f y q, y la densidad del líquido es ρ. Aplicando el enunciado se obtiene la siguiente ecuación equivalente a la ecuación 4.4:

$$\rho V(t_2) = \rho V(t_1) + \rho \int_{t_1}^{t_2} [q_f(\tau) - q(\tau)]\, d\tau$$

donde V expresado en ft^3 es el volumen del líquido en el tiempo t. Dividiendo entre ρ, aplicando el teorema del valor medio, y tomando el límite cuando Δt se aproxima a cero se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = q_f - q \tag{4.7}$$

La ecuación 4.7 es la ecuación básica del modelo. Al referirse a la figura 3.3 y comprobar, para determinar si se tienen suficientes ecuaciones, se encuentra que es necesaria otra relación, para encontrar h como función del tiempo. (Por supuesto, es evidente que esta relación no puede generarse a partir de las leyes de la conservación.) La relación básica necesaria puede obtenerse utilizando el conocimiento de la geometría del sistema.

$V(t)$ = área de la sección de la cuña del tanque, llena con líquido, multiplicada por la longitud de dicho tanque.

$$= \left[\frac{hw}{2}\right]L$$

donde

w = ancho de la cuña en la superficie del líquido.

$$= \frac{hB}{H}$$

$$V(t) = \frac{BLh^2}{2H}$$

Esta es la relación conveniente entre V y h. En el tanque cilíndrico la relación geométrica era demasiado sencilla como para mencionarse ($V=Ah$). Substituyendo en la ecuación 4.7, se obtiene después de unas cuantas manipulaciones:

$$\frac{dh^2}{dt} = \frac{2H}{BL}[q_f - q] \tag{4.8}$$

Si q_f y q son constantes, la ecuación 4.8 puede integrarse y puede establecerse la relación entre h y t

$$\int_{h_0}^{h} dy^2 = \frac{2H}{BL}[q_f - q]\int_{t_0}^{t} d\tau$$

$$h^2 - h_0^2 = \frac{2H}{BL}[q_f - q][t - t_0]$$

$$h = \sqrt{h_0^2 + \frac{2H}{BL}[q_f - q][t - t_0]}$$

Aquí h_0 es la altura del líquido en el tiempo t_0.

4.3 APLICACION DE LAS ECUACIONES DEL MODELO

Antes de continuar el desarrollo de la ecuación del modelo con ejemplos más complicados, será útil entender el proceso total del análisis; observando cómo pueden utilizarse las ecuaciones del modelo para el drenado del tanque en una situación elemental, pero de interés en ingeniería. La finalidad secundaria de esta sección es estimular la práctica del cálculo básico a fin de desarrollar la habilidad necesaria para interpretar correctamente las descripciones matemáticas. Se desarrollan en detalle algunas ideas básicas de control de nivel, utilizando descripciones matemáticas probadas previamente en el llenado y vaciado del tanque.

Si se quiere controlar el nivel del líquido en un tanque que forma parte de un proceso, es necesario considerar cómo se comporta el sistema si existe un cambio en la velocidad de flujo de entrada. Si el proceso está operando en condiciones constantes para un periodo determinado de tiempo, q_f, la velocidad de flujo de entrada, será igual a q la velocidad de flujo de salida. La ecuación 4.5 muestra lo que se conoce intuitivamente: la velocidad de cambio del nivel líquido es cero y el nivel permanece constante. Se supone que el flujo de salida en este proceso, se mantiene a una velocidad fija, q mediante una bomba (situación muy común).

Suponga que debido a una perturbación corriente arriba, en el tiempo T_1 la velocidad de flujo de entrada se incrementa en una cantidad Q^*.

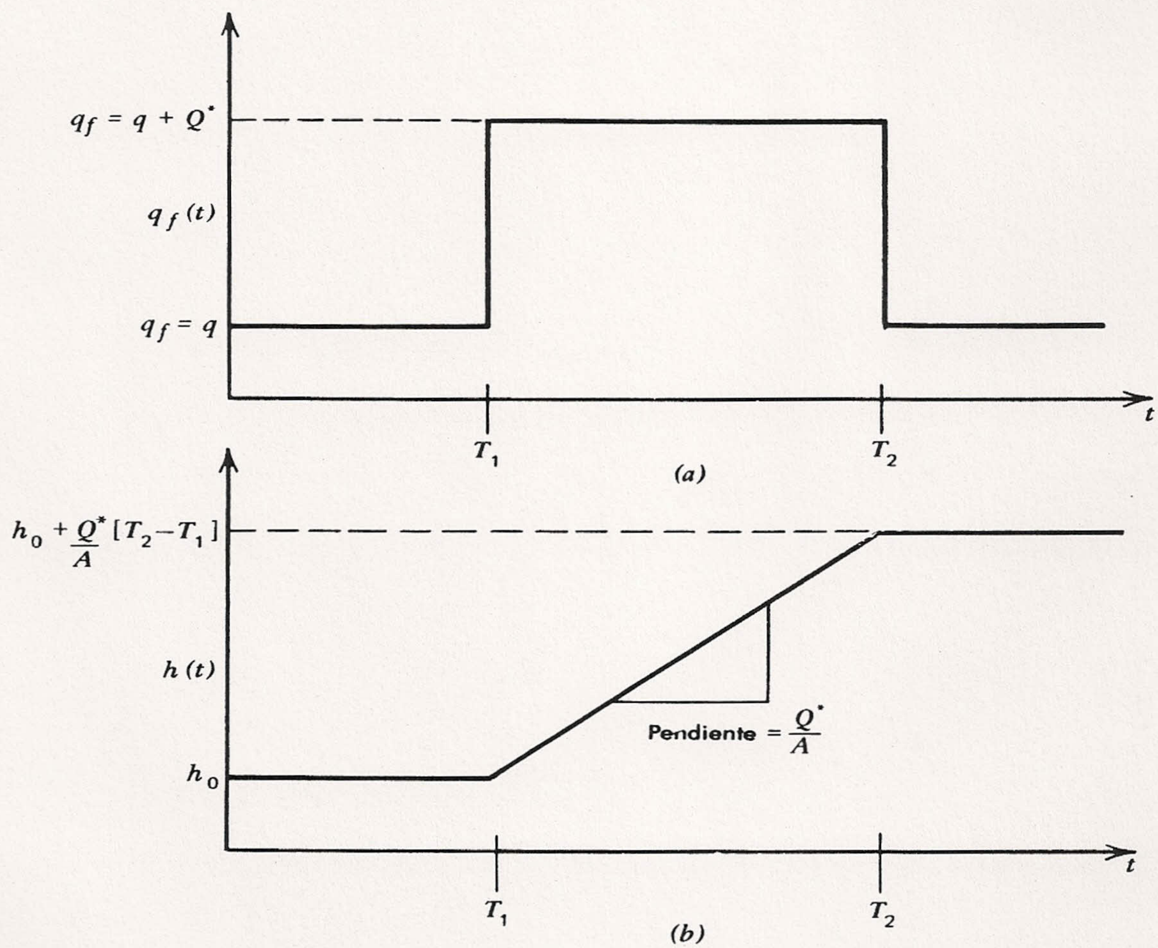


FIGURA 4.3 (*a*) Cambio de la velocidad del flujo de entrada entre T_1 y T_2. (*b*) Cambio en el nivel del líquido.

Tiempo después T_2, el proceso regresa a las condiciones normales y Q^* se convierte en cero. Este tipo de perturbación temporal se muestra gráficamente en la figura 4.3(a).

La ecuación que rige el nivel, la ecuación 4.5, es:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}[q_f(t) - q(t)]$$

Desde el tiempo $t = 0$ hasta $t = T_1$ se tiene:

$$q_f = q, \qquad 0 \leq t < T_1$$

De manera que:

$$\frac{dh}{dt} = 0, \qquad 0 \leq t < T_1$$

$$h = \text{constante}, \qquad 0 \leq t < T_1$$

A esta constante se le denominará h_0.

Cuando $t = T_1$ y hasta $t = T_2$

$$q_f = q + Q^*, \qquad T_1 \leq t < T_2$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q^*}{A}, \qquad T_1 \leq t < T_2$$

La derivada de h es una constante, de tal manera, que h es una función lineal de t que pasa por h_0 cuando $t = T_1$:

$$h(t) = h_0 + \frac{Q^*}{A}[t - T_1], \qquad T_1 \leq t \leq T_2$$

En particular, cuando $t = T_2$

$$h(T_2) = h_0 + \frac{Q^*}{A}[T_2 - T_1]$$

Finalmente, cuando $t = T_2$, q_f regresa en forma permanente a su valor original;

$$q_f = q, \qquad t \geq T_2$$

$$\frac{dh}{dt} = 0, \qquad t \geq T_2$$

$$h = \text{constante}, \qquad t \geq T_2$$

$$h = h_0 + \frac{Q^*}{A}[T_2 - T_1], \qquad t \geq T_2$$

La situación se muestra gráficamente en la figura 4.3(b).

El objetivo es mantener en el tanque un nivel constante razonable, a pesar de las fluctuaciones producidas. Es evidente, que se desea diseñar un sistema que ajuste el flujo de salida para compensar las variaciones en el nivel. El sistema más simple que puede utilizarse es aquel que registre el nivel en forma continua (por ejemplo, un flotador) y que envíe instrucciones eléctricas o neumáticas a una válvula que se abra cuando el nivel sea superior al deseado, y que se cierre cuando éste sea inferior. La figura 4.4 es un diagrama esquemático que muestra ese tipo de ordenamiento. Por

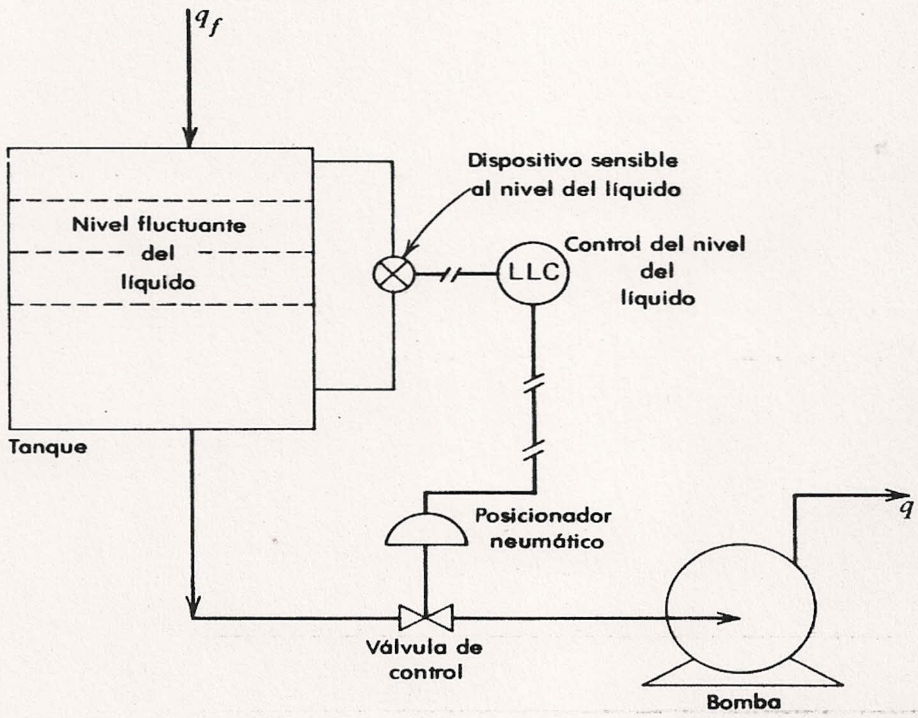


FIGURA 4.4 Diagrama esquemático de un sistema de control de nivel de líquido.

ejemplo, si h^* es el nivel deseado y q^* es la velocidad de flujo de diseño, se puede ajustar el flujo de salida conforme a la siguiente relación:

$$q = q^* + K[h - h^*]$$

En esta forma, conocida como "control proporcional de retroalimentación", el esfuerzo del control depende directamente del "error", $h - h^*$. Cuando h sobrepasa h^* el flujo de salida aumenta; y cuando h es menor que h^* el flujo de salida disminuye. Un error mayor producirá un gran esfuerzo en el control, un error menor requerirá poco control.

El sistema de flujo seguirá regido aún por la ecuación:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}[q_f - q]$$

El sistema con un controlador de nivel sigue la ecuación $q^* + K[h - h^*]$ substituida para q:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}\{q_f - q^* - K[h - h^*]\} \tag{4.9}$$

Si normalmente se espera que $q_f = q^*$ y se expresa la perturbación mediante $Q(t)$, se puede escribir:

$$q_f = q^* + Q(t)$$

La ecuación 4.9 para el sistema del tanque con control puede escribirse:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{K}{A}[h - h^*] = \frac{1}{A}Q(t)$$

Finalmente, dado que se tiene interés en la diferencia $h - h^*$, y como h^* es una constante, se puede escribir:

$$\frac{d[h - h^*]}{dt} = \frac{dh}{dt} - \frac{dh^*}{dt} = \frac{dh}{dt}$$

por tanto,

$$\frac{d}{dt}[h - h^*] + \frac{K}{A}[h - h^*] = \frac{1}{A}Q(t) \tag{4.10}$$

Se busca una solución para esta ecuación empezando en el tiempo $t = 0$, cuando se supone que el sistema está en el nivel deseado $h = h^*$.

La ecuación 4.10 no es separable, pero puede integrarse mediante la siguiente suposición que se explica con más detalle en la sección 15.10:

$$\frac{d}{dt}[h - h^*] + \frac{K}{A}[h - h^*] = e^{-Kt/A}\frac{d}{dt}\{e^{Kt/A}[h - h^*]\}$$

La ecuación 4.10 puede escribirse:

$$\frac{d}{dt}\{e^{Kt/A}[h - h^*]\} = \frac{e^{Kt/A}}{A}Q(t)$$

Integrando ambos miembros se obtiene:

$$e^{K\tau/A}[h - h^*]\Big|_0^t = \frac{1}{A}\int_0^t e^{K\tau/A}Q(\tau)\,d\tau$$

y teniendo en cuenta que cuando $t = 0$, $h - h^* = 0$; se obtiene finalmente la altura como una función del tiempo:

$$h(t) = h^* + \frac{e^{-Kt/A}}{A}\int_0^t e^{K\tau/A}Q(\tau)\,d\tau \tag{4.11}$$

Para observar el efecto obtenido al colocar un sistema de control en el tanque, regrese a la etapa de las perturbaciones de entrada que se estudiaron previamente. La alimentación al sistema varía como sigue:

$$Q(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < T_1 \\ Q^* = \text{constante}, & T_1 \le t < T_2 \\ 0, & T \le t \end{cases}$$

Entonces:

$$\int_0^t e^{K\tau/A}Q(\tau)\,d\tau = 0, \qquad t < T_1$$

$$\int_0^t e^{K\tau/A}Q(\tau)\,d\tau = \int_{T_1}^t e^{K\tau/A}Q^*\,d\tau = \frac{AQ^*}{K}\left[e^{Kt/A} - e^{KT_1/A}\right], \qquad T_1 \le t < T_2$$

$$\int_0^t e^{K\tau/A}Q(\tau)\,d\tau = \int_{T_1}^{T_2} e^{K\tau/A}Q^*\,d\tau = \frac{AQ^*}{K}\left[e^{KT_2/A} - e^{KT_1/A}\right], \qquad T_2 \le t$$

El nivel en el tanque como función de tiempo será:

$$h = h^* + 0 = h^*, \qquad 0 \le t < T_1$$

$$h = h^* + \frac{Q^*}{K}\left[1 - e^{-K[t-T_1]/A}\right], \qquad T_1 \le t < T_2$$

$$h = h^* + \frac{Q^*}{K}\left[e^{-K[t-T_2]/A} - e^{-K[t-T_1]/A}\right], \qquad T_2 \le t$$

El comportamiento del sistema se muestra en la figura 4.5 donde se compara con el comportamiento del sistema sin control ($K = 0$). La diferencia es sorprendente, y es evidente, que mediante una elección adecuada de K las fluctuaciones en el nivel del tanque pueden mantenerse dentro de los límites deseados

Como se explicó en el capítulo 2 y se indicó gráficamente en la figura 2.1, la característica fundamental del análisis de ingeniería, es que se debe utilizar el modelo matemático para diseño y una predicción que sean de utilidad. Para el sistema de control de nivel del que se habló con anterioridad, se puede indicar cómo permite el modelo matemático especificar el

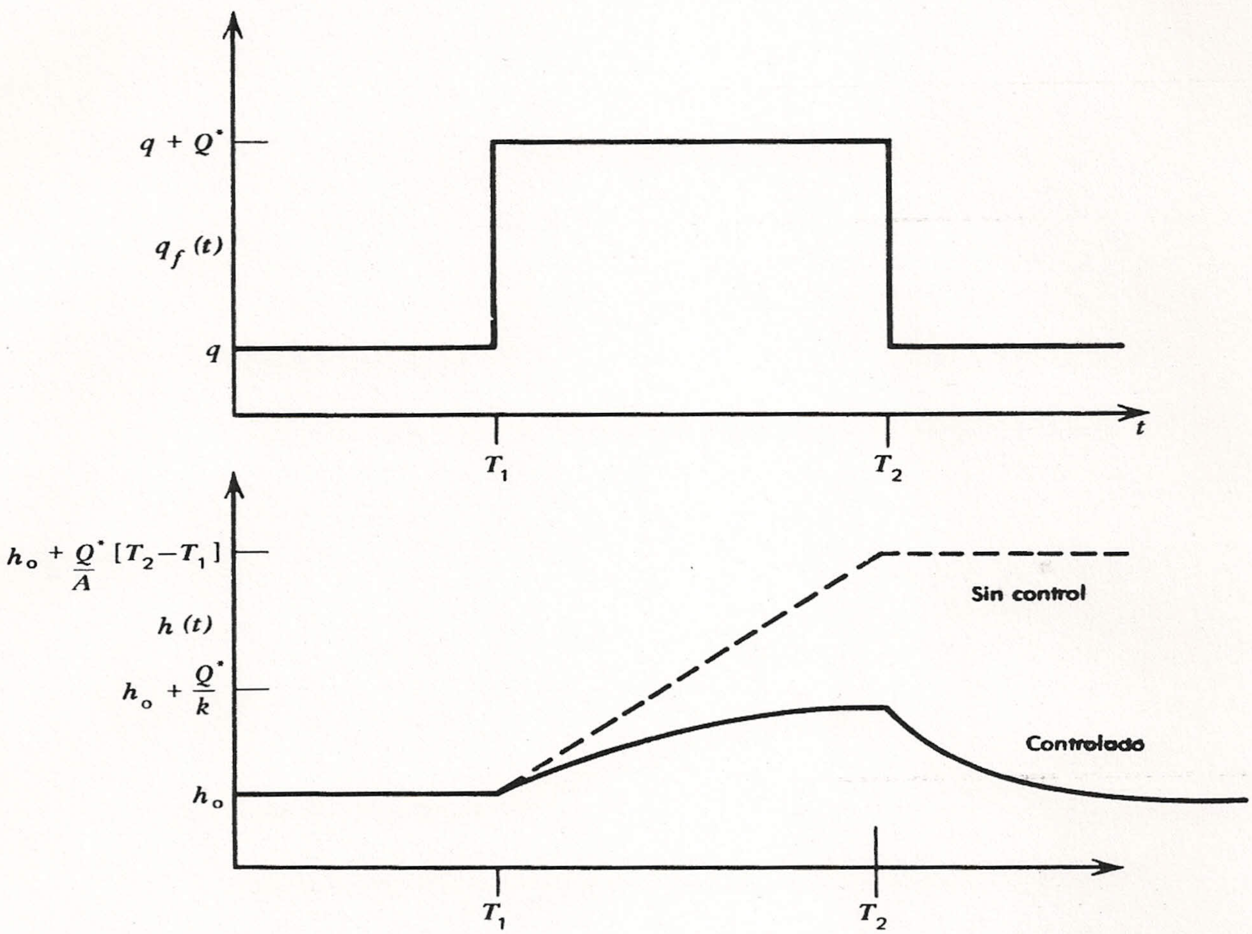


FIGURA 4.5 Cambio en la velocidad del flujo de entrada, y el cambio correspondiente en el nivel de líquido con retroalimentación proporcional.

parámetro K de "ganancia proporcional" con objeto de asegurar, sin importar la perturbación, que el nivel permanecerá dentro de los límites requeridos. Se supone que las fluctuaciones en la alimentación de entrada nunca excederán una fracción f de la velocidad total del flujo de diseño q^*, esto es,

$$\text{máximo de } |Q(t)| \leq fq^*$$

Se debe elegir K de tal manera, que las fluctuaciones en el nivel del líquido nunca excedan a una fracción ϕ del nivel total de diseño, esto es,

$$\text{máximo de } |h(t) - h^*| \leq \phi h^*$$

Se puede encontrar un valor de diseño para K, al manipular la ecuación 4.11. Primero exprese la ecuación como:

$$\frac{h - h^*}{h^*} = \frac{e^{-Kt/A}}{Ah^*}\int_0^t e^{K\tau/A} Q(\tau)\, d\tau$$

La condición de diseño $|h - h^*| \leq \phi h^*$ conduce entonces a:

$$\frac{e^{-Kt/A}}{Ah^*}\left|\int_0^t e^{K\tau/A} Q(\tau)\, d\tau\right| \leq \phi$$

La integral toma su valor mayor cuando $Q(t)$ es lo más grande posible para todo el tiempo. De esta menera, si se toma $Q(t) = fq^*$ se obtiene la desigualdad de diseño:

$$\frac{fq^*}{Ah^*}\, e^{-Kt/A}\int_0^t e^{K\tau/A}\, d\tau \leq \phi$$

o, efectuando la integración,

$$\frac{fq^*}{Kh^*}\,[1 - e^{-Kt/A}] \leq \phi$$

El miembro izquierdo toma el valor mayor cuando t se hace muy grande, de tal manera que se tendrá:

$$\frac{fq^*}{Kh^*} \leq \phi$$

o, despejando K,

$$K \geq \frac{fq^*}{\phi h^*}$$

El valor mínimo permisible de K requiere una actividad mínima de parte del sistema del control. De esta manera para propósitos de diseño,

$$K = \frac{fq^*}{\phi h^*} \tag{4.12}$$

y se requiere que la velocidad de flujo de salida dependa del nivel del líquido en la ecuación:

$$q = q^*\left[1 + \frac{f}{\phi}\,\frac{h - h^*}{h^*}\right]$$

Si las fluctuaciones en la velocidad de alimentación pueden ser hasta de un 10% de la velocidad de flujo diseñada, y se requiere que el nivel en el líquido permanezca constante dentro de un 3%, entonces $f = 0.10$, $\phi = 0.03$ y:

$$q = q^*\left[1 + \frac{10}{3}\,\frac{h - h^*}{h^*}\right]$$

Esto es, por cada incremento o disminución en el porcentaje del nivel del líquido, la velocidad de flujo de salida se incrementa o disminuye en 3-1/3 por ciento, con objeto de asegurar que no se excede nunca la tolerancia en el diseño. Note que es un diseño moderado y que, generalmente, las fluctuaciones en h serán significativamente menores del tres por ciento.

4.4 BALANCES DE MASA PARA UN COMPONENTE

En la mayor parte de los ejemplos interesantes para este estudio hay varias especies de masa; el resto de este capítulo estudia el desarrollo del modelo que analiza estos sistemas. La más simple de dichas aplicaciones es la del principio de la conservación de la masa en relación al sistema de flujo, mostrado en la figura 4.6. En la que se tiene un tanque cilíndrico con dos corrientes que entran y una que sale. Las corrientes que entran se

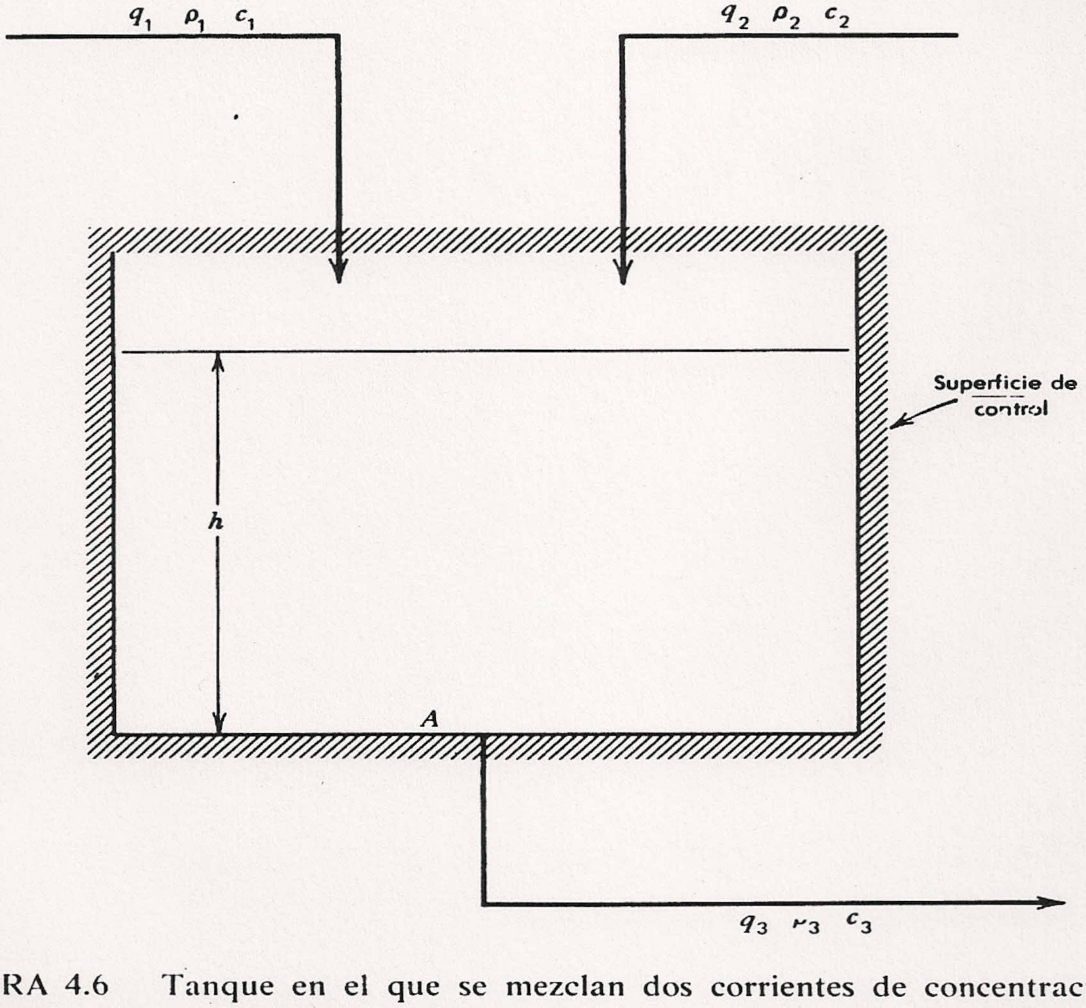


FIGURA 4.6 Tanque en el que se mezclan dos corrientes de concentraciones diferentes en forma continua.

numeran como 1 y 2, con concentraciones de masa c_1 y c_2 de una sustancia disuelta (una sal) en agua, mientras la concentración es c_3 para la corriente de salida número 3. Las densidades son ρ_1, ρ_2 y ρ_3, respectivamente, y las velocidades de flujo volumétrico se mantienen mediante bombas q_1, q_2 y q_3. El área del corte transversal del tanque es A y el nivel del líquido es h. Se desea relacionar el nivel del líquido, y la concentración de salida con los flujos y las concentraciones de entrada.

Utilizando el diagrama de flujo que se muestra en la figura 3.4, se observa que son evidentes varios de los primeros pasos. La variable fundamental es la masa, y ésta se caracteriza por las variables dadas anteriormente. Examine con más detalle la elección de un volumen de control. Se ha dibujado el área sombreada de la figura 4.6 con objeto de utilizar esa parte del equipo del proceso, es decir, el tanque mezclador como volumen de control. Como las dos corrientes que entran al tanque difieren en composición y densidad, es de esperar que en ausencia de agitación haya variaciones en la concentración de la sal y en la densidad del líquido dentro del tanque. Por tanto el volumen de control diseñado no puede definirse mediante valores característicos de las variables con respecto a la posición espacial. Para evitar esta dificultad se supone que el tanque está suficientemente agitado como para tener una composición uniforme. De esta manera, una muestra tomada de un lugar será idéntica a otra tomada al mismo tiempo de otro lugar. Esto es, suponga que se tiene una representación que describe el problema en forma adecuada, *suposición que en último caso requerirá de verificación experimental.* De aquí se deriva la suposición de la *mezcla perfecta,* esto es, que la composición en cualquier lugar del tanque es idéntica a la composición del lugar de salida. De esta manera, la concentración y la densidad del material para cualquier tiempo, serán respectivamente c_3 y ρ_3.

Aplicando el principio de la conservación de la masa a la masa total es evidente que:

$$\left\{\begin{matrix}\text{masa en el tanque}\\ \text{en el tiempo } t_2\\ \rho_3(t_2)Ah(t_2)\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{masa en el tanque}\\ \text{en el tiempo } t_1\\ \rho_3(t_1)Ah(t_1)\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{masa que entra en}\\ \text{la corriente 1}\\ \int_{t_1}^{t_2} \rho_1(\tau)q_1(\tau)\,d\tau\end{matrix}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{matrix}\text{masa que entra en}\\ \text{la corriente 2}\\ \int_{t_1}^{t_2} \rho_2(\tau)q_2(\tau)\,d\tau\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{masa que sale en}\\ \text{la corriente 3}\\ \int_{t_1}^{t_2} \rho_3(\tau)q_3(\tau)\,d\tau\end{matrix}\right\}$$

o

$$\rho_3(t_2)Ah(t_2) = \rho_3(t_1)Ah(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} [\rho_1(\tau)q_1(\tau) + \rho_2(\tau)q_2(\tau) - \rho_3(\tau)q_3(\tau)]\, d\tau \quad (4.13)$$

Hasta aquí hay poca información sobre la cantidad de sal que contiene el sistema. Para obtenerla, es necesario observar que la conservación de la masa se aplica no solamente a la masa total del sistema, sino también a las *especies componentes*, sal y agua.
Debe ser cierto, por ejemplo que:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{masa de } \textit{sal} \text{ en el}\\ \text{tanque en el}\\ \text{tiempo } t_2\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{masa de } \textit{sal} \text{ en el}\\ \text{tanque en el}\\ \text{tiempo } t_1\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{masa de } \textit{sal} \text{ q... entra}\\ \text{en la cor... 1}\end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{c}\text{masa de } \textit{sal} \text{ que entra}\\ \text{en la corriente 2}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{masa de } \textit{sa.}\\ \text{sale en la corrien...}\end{array}\right\}$$

Como la concentración de la sal c_1, c_2 y c_3, está dada en unid... s de $\mathrm{lb_m}$ sal/ft^3, la masa de la sal en el tanque es igual a c_3Ah

$$[\mathrm{lb_m}] = \left[\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{ft}^3}\right][\mathrm{ft}^2][\mathrm{ft}]$$

la velocidad del flujo de la masa de la sal en la corriente 1 es $= c_1q_1$

$$\left[\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{min}}\right] = \left[\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{ft}^3}\right]\left[\frac{\mathrm{ft}^3}{\mathrm{min}}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{flujo de masa de la sal en la corriente 1}\\ =\text{integral de la velocidad de flujo de masa}\end{array}\right\} = \int_{t_1}^{t_2} c_1(\tau)q_1(\tau)\, d\tau$$

De esta manera:

$$c_3(t_2)Ah(t_2) = c_3(t_1)Ah(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} c_1(\tau)q_1(\tau)\, d\tau + \int_{t_1}^{t_2} c_2(\tau)q_2(\tau)\, d\tau - \int_{t_1}^{t_2} c_3(\tau)q_3(\tau)\, d\tau \quad (4.14)$$

Igualmente es cierto que:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{masa de } \textit{agua} \text{ en el tanque}\\ \text{en el tiempo } t_2\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c}\text{masa de } \textit{agua} \text{ en el}\\ \text{tanque en el tiempo } t_1\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{masa de } \textit{agua} \text{ en flujo en}\\ \text{la corriente 1}\end{array}\right\}$$

$$+\begin{Bmatrix}\text{masa de } \textit{agua} \text{ en flujo} \\ \text{en la corriente 2}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{masa de } \textit{agua} \text{ que sale en el} \\ \text{flujo de la corriente 3}\end{Bmatrix}$$

No obstante, la concentración de agua en la corriente 1 es simplemente $\rho_1 - c_1$, libras totales por pie cúbico, menos libras de sal por pie cúbico, igualmente para las corrientes 2 y 3. De esta manera, la ecuación de la conservación de la masa se aplica al agua y se obtiene:

$$\begin{aligned}[\rho_3(t_2) - c_3(t_2)]Ah(t_2) &= [\rho_3(t_1) - c_3(t_1)]Ah(t_1) \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \{[\rho_1(\tau) - c_1(\tau)]q_1(\tau) + [\rho_2(\tau) - c_2(\tau)]q_2(\tau) \\ &\qquad - [\rho_3(\tau) - c_3(\tau)]q_3(\tau)\}\, d\tau\end{aligned}$$

y ésta, es simplemente la diferencia entre las ecuaciones de la masa total y la sal. Por tanto, no se obtendrá nueva información. De las tres ecuaciones, **—la de masa total, la de sal y la del agua— solamente dos pueden ser independientes y propocionar información útil.**

Se tienen entonces dos ecuaciones que regulan el comportamiento del sistema de flujo, que se pueden escribir en términos de los tiempos de t y $t + \Delta t$:

sal + *agua*:

$$\begin{aligned}\rho_3(t + \Delta t)Ah(t + \Delta t) &= \rho_3(t)Ah(t) \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} [\rho_1(\tau)q_1(\tau) + \rho_2(\tau)q_2(\tau) - \rho_3(\tau)q_3(\tau)]\, d\tau\end{aligned}$$

sal:

$$\begin{aligned}c_3(t + \Delta t)Ah(t + \Delta t) &= c_3(t)Ah(t) \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} [c_1(\tau)q_1(\tau) + c_2(\tau)q_2(\tau) - c_3(\tau)q_3(\tau)]\, d\tau\end{aligned}$$

En términos de valores medios, y aplicando el teorema del valor medio,

sal + *agua*:

$$\rho_3(t + \Delta t)Ah(t + \Delta t) = \rho_3(t)Ah(t) + [\overline{\rho_1 q_1} + \overline{\rho_2 q_2} - \overline{\rho_3 q_3}]\, \Delta t$$

sal:

$$c_3(t + \Delta t)Ah(t + \Delta t) = c_3(t)Ah(t) + [\overline{c_1 q_1} + \overline{c_2 q_2} - \overline{c_3 q_3}]\, \Delta t$$

donde los guiones superiores indican que la función es evaluada entre t y $t + \Delta t$. De esta manera:

$$\text{sal + agua:}\quad \frac{\rho_3(t+\Delta t)h(t+\Delta t) - \rho_3(t)h(t)}{\Delta t} = \frac{1}{A}\left[\overline{\rho_1 q_1} + \overline{\rho_2 q_2} - \overline{\rho_3 q_3}\right]$$

$$\text{sal:}\quad \frac{c_3(t+\Delta t)h(t+\Delta t) - c_3(t)h(t)}{\Delta t} = \frac{1}{A}\left[\overline{c_1 q_1} + \overline{c_2 q_2} - \overline{c_3 q_3}\right]$$

En los procesos limitantes $\Delta t \to 0$ el término del miembro izquierdo se convierte en la derivada evaluada en el tiempo t, mientras que los términos del miembro derecho se evalúan en el tiempo t. (Todos los tiempos entre t y $t + \Delta t$ se convierten en t cuando $\Delta t \to 0$.) Dado que t es cualquier tiempo, entonces las siguientes ecuaciones son verdaderas:

$$\text{sal + agua:}\quad \frac{d}{dt}\rho_3 h = \frac{1}{A}[\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2 - \rho_3 q_3] \tag{4.15}$$

$$\text{sal:}\quad \frac{d}{dt}c_3 h = \frac{1}{A}[c_1 q_1 + c_2 q_2 - c_3 q_3] \tag{4.16}$$

Note que es importante tener la ecuación de la sal en forma de ecuación diferencial, ya que la formulación integral original, desarrollada directamente a partir del principio de la conservación de la masa, es decir, la ecuación 4.14 comprendía la función $c_3(t)$ (probablemente desconocida), tanto en el miembro izquierdo como bajo la integral en el derecho. La integración para encontrar $c_3(t)$ no podía efectuarse sin conocer cómo c_3 depende del tiempo, y la dependencia de c_3 sobre t es por supuesto parte del problema.

4.5 COMPORTAMIENTO DEL MODELO

Las ecuaciones del flujo para el sistema sal-agua que se dedujeron antes, no contienen información adecuada para resolver el problema. Se tiene un total de once variables; tres concentraciones, c_1, c_2 y c_3; tres densidades, ρ_1, ρ_2 y ρ_3; tres velocidades de flujo, q_1, q_2 y q_3; la altura del líquido, h; y el área A. Usualmente se darían A, q_1, q_2, q_3, y tal vez c_1 y c_2. Las dos ecuaciones serán adecuadas para encontrar h y c_3 cuando se tenga mayor información de las densidades. Esto es, se requiere una *relación básica* para establecer una relación entre la densidad y la concentración, y así, proporcionar las tres ecuaciones posteriores.

En este punto será útil para simplificar, buscar una posibilidad que sea razonable y facilite el análisis, aunque finalmente se encontrará que no es necesaria para obtener los resultados dados. Se supondrá que las densidades de las soluciones de sal en agua en este problema son esencialmente independientes de la concentración y, por lo tanto, son constantes en todas las corrientes para todo el tiempo. Se expresará este valor constante como ρ. Entonces:

$$\frac{d}{dt}\rho_3 h = \rho\frac{dh}{dt} = \frac{\rho}{A}[q_1 + q_2 - q_3]$$

o

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}[q_1 + q_2 - q_3] \tag{4.17}$$

Cuando el flujo volumétrico neto es cero ($q_1 + q_2 = q_3$), el nivel no cambia.

4.5.1 Comportamiento en el estado estable

Un caso interesante es aquel en que los flujos de entrada y salida son constantes e iguales ($q_1 + q_2 = q_3$). Entonces $dh/dt = 0$ y $h =$ constante. La ecuación de la sal se convierte en:

$$\frac{d}{dt}c_3 h = h\frac{dc_3}{dt} = \frac{1}{A}[c_1 q_1 + c_2 q_2 - c_3 q_3]$$

o

$$\frac{dc_3}{dt} = \frac{1}{\theta}[\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - c_3] \tag{4.18}$$

donde

$$\theta = Ah/q_3 \; [=] \text{ tiempo}$$

$$\lambda_1 = q_1/q_3 \qquad \lambda_2 = q_2/q_3 = 1 - \lambda_1$$

Si se va a efectuar la integración para encontrar $c_3(t)$, será necesario evaluar una constante de integración, y en consecuencia, se necesita información sobre el sistema en un tiempo determinado. Suponga que ésta es el valor de la concentración, c_{30}, en el tiempo $t = 0$. Si c_1 y c_2 son constantes, entonces la ecuación 4.18 puede expresarse para producir:

$$\frac{dc_3}{c_3 - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2} = -\frac{dt}{\theta}$$

Integrando a partir de $t = 0$ a un tiempo posterior:

$$\ln\frac{c_3 - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2}{c_{30} - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2} = -\frac{t}{\theta}$$

$$c_3(t) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + [c_{30} - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2]e^{-t/\theta} \tag{4.19}$$

A medida que t aumenta, la exponencial se aproxima a cero en cuyo caso

$$t \text{ grande: } c_3 \rightarrow \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$$

O sea, c_3 se aproxima a un *estado constante.* Este estado constante es característico de la mayoría de los equipos de proceso. Por supuesto en el estado constante nada cambia con el tiempo, y las derivadas con respecto al tiempo serán cero. Se puede encontrar el valor del estado constante, directamente con la ecuación:

$$Ah\frac{dc_3}{dt} = c_1 q_1 + c_2 q_2 - c_3 q_3$$

igualando dc_3/dt a cero. En el estado constante, la velocidad a que fluye la sal hacia el interior $c_1 q_1 + c_2 q_2$, es igual a la velocidad a que sale $c_3 q_3$.

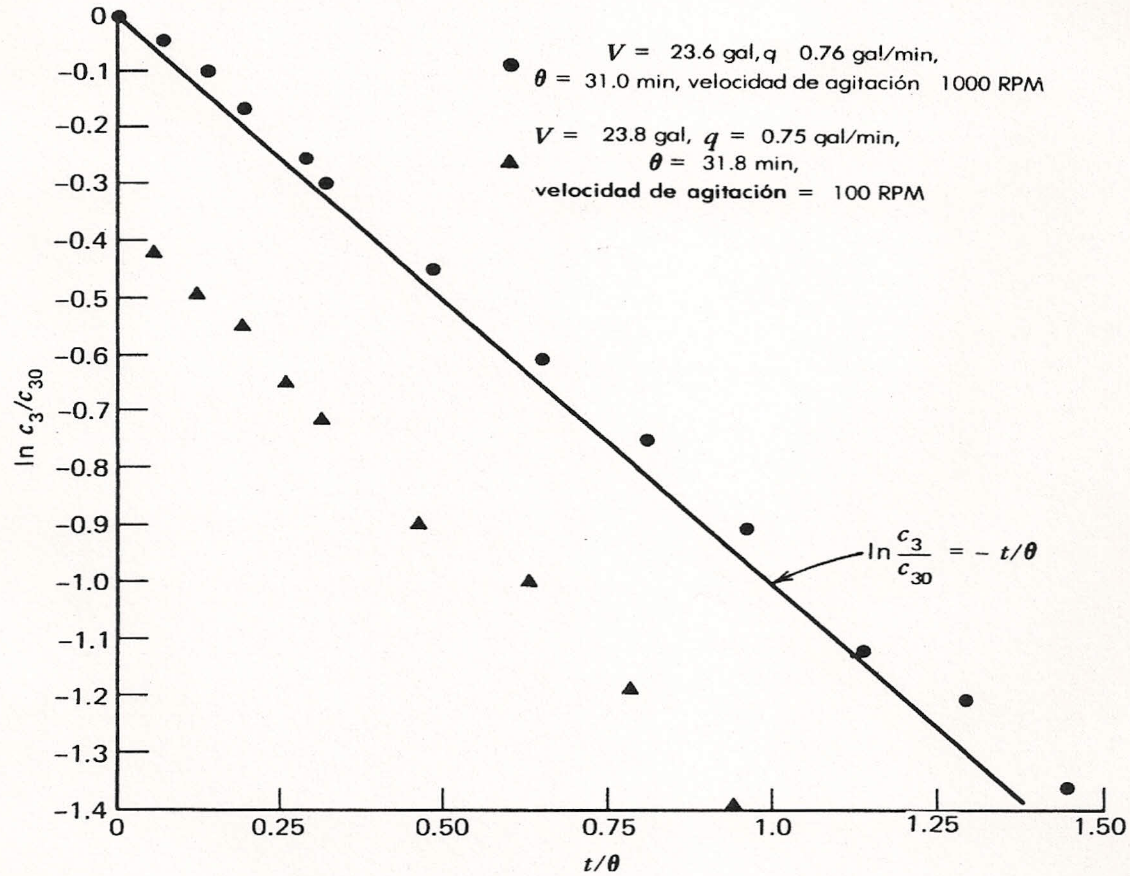


FIGURA 4.7 El logaritmo natural de c_3/c_0 y t/θ para la sal lavada de un tanque. La agitación fue efectuada por una propela marina de 2 - 1/2 pulgadas de diámetro con una altura de líquido de 10 pulgadas. La agitación provocada intencionalmente resultó ineficiente. Datos de D.T.T. Chiang.

Posteriormente, se advierte que el "tiempo real" t no es la cantidad pertinente que determina el valor del estado constante, sino la relación adimensional t/θ, pero solamente cuando t/θ es suficientemente grande (es decir, $t/\theta \geq 3$) c_3 es básicamente constante. La cantidad $\theta = Ah/q_3$, es decir, la relación del volumen a velocidad de flujo volumétrico se denomina *tiempo de residencia*. En cualquier análisis general de un sistema se debe tomar en cuenta tanto al intervalo transitorio con varios tiempos de residencia, cuando el sistema está cambiando substancialmente, como al subsecuente estado constante durante el que no hay variación respecto al tiempo.

Finalmente, observe que el proceso del análisis aún no está completo. Se han planteado dos posibilidades: el mezclado perfecto y la densidad constante. Posteriormente se demostrará que la segunda de éstas no se refiere a los resultados obtenidos hasta aquí, y por lo pronto se solicita al lector que acepte este hecho. No obstante, se necesita verificar la primera posibilidad si se van a utilizar los resultados de ésta; así como emplear análisis similares para predecir. El experimento más simple que puede efectuarse para estudiar la validez de la posibilidad del mezclado perfecto, es un experimento de lavado; en el que un tanque con una concentración inicial conocida de sal se ha lavado mediante una corriente de entrada pura. En este caso $q_1 = q_3$, $q_2 = 0, c_1 = 0$, y la dependencia del tiempo de $c_3(t)$ en la ecuación 4.19 es

$$\frac{c_3(t)}{c_{30}} = e^{-t/\theta}$$

o

$$\ln \frac{c_3}{c} = -t/\theta$$

Los datos mostrados en la figura 4.7 indican que con suficiente agitación, las predicciones teóricas que se basan en el mezclado perfecto concuerdan con las observaciones experimentales.

4.5.2 Comportamiento en estado no estable

Una segunda situación de interés que incluye realmente la estudiada previamente como caso especial, es aquélla en la que q_1, q_2 y q_3 son constantes, pero $q_1 + q_2 \neq q_3$. Las ecuaciones que rigen las ecuaciones 4.16 y 4.17 son entonces

$$\text{sal + agua:} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}[q_1 + q_2 - q_3] = \text{constante} \tag{4.20}$$

$$\text{sal:} \quad \frac{d}{dt}c_3h = \frac{1}{A}[c_1q_1 + c_2q_2 - c_3q_3]$$

$$= h\frac{dc_3}{dt} + c_3\frac{dh}{dt}$$

$$= h\frac{dc_3}{dt} + \frac{1}{A}c_3[q_1 + q_2 - q_3] \tag{4.21}$$

La ecuación del balance total de masa puede integrarse directamente para dar:

$$h = h_0 + \frac{1}{A}[q_1 + q_2 - q_3]t \tag{4.22}$$

donde h_0 es el nivel en $t = 0$, en cuyo caso la ecuación de la sal se simplifica para

$$\{Ah_0 + [q_1 + q_2 - q_3]t\}\frac{dc_3}{dt} = q_1c_1 + q_2c_2 - [q_1 + q_2]c_3$$

o

$$\left[\frac{Ah_0}{q_1 + q_2 - q_3} + t\right]\frac{dc_3}{dt} = \frac{q_1c_1 + q_2c_2}{q_1 + q_2 - q_3} - \frac{q_1 + q_2}{q_1 + q_2 - q_3}c_3$$

Esta ecuación se integra haciendo notar que:

$$\frac{dt}{t + \dfrac{Ah_0}{q_1 + q_2 - q_3}} = d[\ln \tau]$$

Donde

$$\tau = t + \frac{Ah_0}{q_1 + q_2 - q_3}$$

De esta manera:

$$\frac{dc_3}{c_3 - \dfrac{q_1c_1 + q_2c_2}{q_1 + q_2}} = -\frac{q_1 + q_2}{q_1 + q_2 - q_3}d\ln\tau$$

o

$$\ln\left[\frac{c_3 - \dfrac{q_1c_1 + q_2c_2}{q_1 + q_2}}{c_{30} - \dfrac{q_1c_1 + q_2c_2}{q_1 + q_2}}\right] = -\frac{q_1 + q_2}{q_1 + q_2 - q_3}\ln\left[\frac{t + \dfrac{Ah_0}{q_1 + q_2 - q_3}}{0 + \dfrac{Ah_0}{q_1 + q_2 - q_3}}\right]$$

$$c_3(t) = \frac{q_1c_1 + q_2c_2}{q_1 + q_2} + \left[c_{30} - \frac{q_1c_1 + q_2c_2}{q_1 + q_2}\right] \times \left[\frac{1}{1 + \dfrac{[q_1 + q_2 - q_3]t}{Ah_0}}\right]^{[q_1+q_2]/[q_1+q_2-q_3]} \tag{4.23}$$

Note que para un valor pequeño de h_0 la aproximación a un estado constante para la concentración (la altura varía en forma constante) es rápida:

$$c_3 \to \frac{q_1c_1 + q_2c_2}{q_1 + q_2}$$

De hecho, para un tanque que inicialmente está vacío ($h_0 = 0$) el paréntesis cuadrado del miembro derecho es idéntico a cero, y la concentración es siempre constante; en un principio dicho resultado podría parecer sorprendente.

El caso en que el flujo de entrada es igual al de salida ($q_1 + q_2 - q_3 = 0$), se obtiene mediante un proceso límite según se indica:

$$\left[\frac{1}{1 + \dfrac{[q_1 + q_2 - q_3]t}{Ah_0}}\right]^{[q_1+q_2]/[q_1+q_2-q_3]} = \left[\frac{1}{1 + \varepsilon[t/\theta]}\right]^{1/\varepsilon}$$

donde $\theta = \dfrac{Ah_0}{q_1 + q_2}$ (cuando $q_1 + q_2 = q_3$ y $h =$ una constante según se

definió anteriormente) y:

$$\varepsilon = \frac{q_1 + q_2 - q_3}{q_1 + q_2}$$

En el límite, a medida que $\varepsilon \to 0$ se obtiene la exponencial tomando primero el logaritmo y aplicando después la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{1 + \varepsilon[t/\theta]} \right\}^{1/\varepsilon} = e^{-t/\theta}$$

en cuyo caso la concentración se convierte en la dada por la ecuación 4.19:

$$\text{lím } q_1 + q_2 \to q_3:$$

$$c_3(t) = \frac{q_1 c_1 + q_2 c_2}{q_1 + q_2} + \left[c_{30} - \frac{q_1 c_1 + q_2 c_2}{q_1 + q_2} \right] e^{-t/\theta}$$

4.5.3 Suposición de densidad

Los resultados anteriores se basaron en la suposición de que en el sistema de dos componentes la densidad fue una constante independiente de la concentración, que conduce a las ecuaciones:

$$\text{masa total:} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} [q_1 + q_2 - q_3] \tag{4.17}$$

$$\text{sal:} \quad \frac{d}{dt} c_3 h = \frac{1}{A} [q_1 c_1 + q_2 c_2 - q_3 c_3] \tag{4.16}$$

La figura 4.8 muestra los datos para la densidad de soluciones acuosas de cloruro de sodio. Sobre el intervalo de concentraciones mostrados existe un cambio de un 20% en la densidad, de manera que es evidente que el supuesto de densidad constante en ocasiones es inexacto.

Consecuencia importante de la suposición de densidad constante es la ecuación 4.17 que indica que la velocidad de cambio en el volumen es igual a la velocidad neta de flujo volumétrico. Se sabe por experiencia que cuando se mezclan sustancias de densidad diferente, el volumen total generalmente, no es igual a la suma de los volúmenes mezclados entre sí; de tal manera que la conservación del volumen del tipo expresado en la ecuación 4.17 podría parecer más bien un caso especial y limitado. La ecuación 4.17 es una simplificación sustancial de la ecuación más general 4.15, y es la forma del balance total de masa que usualmente se emplea para sistemas líquidos a pesar de las variaciones en la densidad. Se mostrará que la ecuación 4.17 se puede deducir conforme a supuestos con menos restricciones que los utilizados previamente.

Los datos de densidad de la figura 4.8 indican que la densidad de soluciones sal-agua sobre un amplio rango, pueden obtenerse aproximadamente por:

$$\rho = \rho_0 + bc \qquad (4.24)$$

En general ρ_0 es simplemente una intersección sin ningún significado físico, aun cuando si se están utilizando datos a baja concentración, ρ_0 podría ser la densidad del agua pura. Esta relación lineal es una *ecuación básica*, que aunque no constituye un principio universal, es siempre verdadera para todos los sistemas sal-agua dentro del intervalo de concentración dado.

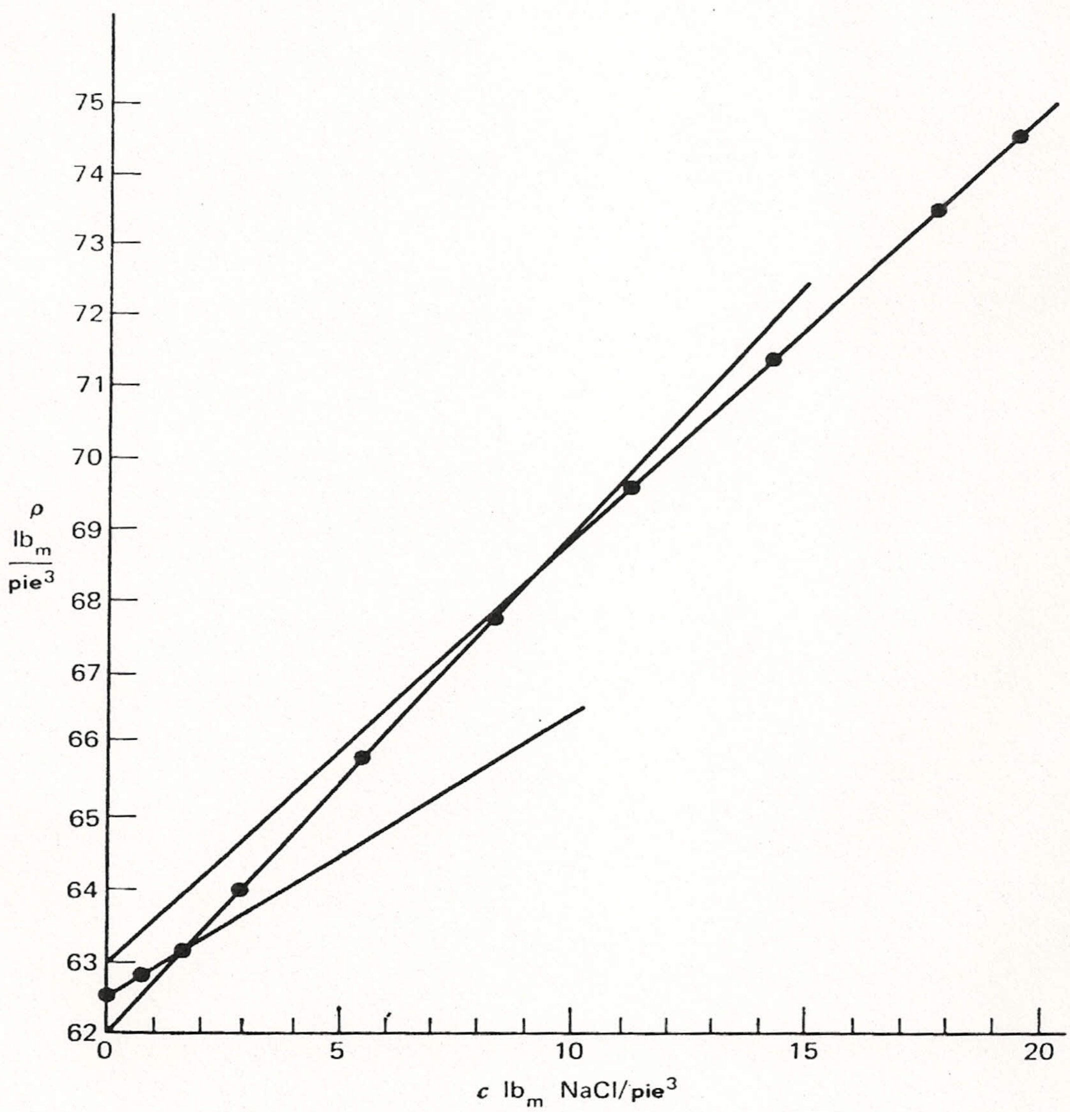


FIGURA 4.8 Densidad de soluciones acuosas de NaCl a 20°C.

El balance total de masa es, ecuación 4.15:

$$\frac{d}{dt}\rho_3 h = \frac{1}{A}[\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2 - \rho_3 q_3] \tag{4.15}$$

De la ecuación 4.24 se puede escribir para cada densidad:

$$\rho_1 = \rho_0 + bc_1$$

$$\rho_2 = \rho_0 + bc_2$$

$$\rho_3 = \rho_0 + bc_3$$

De esta manera, la ecuación 4.15 se convierte en:

$$\frac{d}{dt}[\rho_0 + bc_3]h$$

$$= \frac{1}{A}\{[\rho_0 + bc_1]q_1 + [\rho_0 + bc_2]q_2 - [\rho_0 + bc_3]q_3\}$$

Dado que

$$\frac{d}{dt}[\rho_0 + bc_3]h = \rho_0\frac{dh}{dt} + b\frac{d}{dt}c_3 h$$

se puede dividir la ecuación como sigue:

$$\left\{\begin{matrix} \rho_0 \dfrac{dh}{dt} \\ \\ + b\dfrac{d}{dt}c_3 h \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \rho_0 \dfrac{1}{A}[q_1 + q_2 - q_3] \\ \\ + b\dfrac{1}{A}[c_1 q_1 + c_2 q_2 - c_3 q_3] \end{matrix}\right\}$$

La segunda línea es simplemente la ecuación 4.16, el balance de la sal, multiplicado por b; de tal manera, que el término de la izquierda es igual al término de la derecha:

$$\rho_0\frac{dh}{dt} = \rho_0\frac{1}{A}[q_1 + q_2 - q_3]$$

o

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}[q_1 + q_2 - q_3]$$

Esta es la ecuación 4.17 que se dedujo previamente, suponiendo una densidad constante. De esta manera, se ha obtenido el siguiente resultado importante que indica que *la velocidad de cambio de volumen es igual a la* *velocidad neta de flujo volumétrico cuando la relación densidad-concentración es lineal.* Que el volumen se conserve en un caso de variación de densidad puede ser una sorpresa, y aún en este problema sencillo, el modelo matemático proporciona información que no se puede observar fácilmente. Si se reflexiona sobre el significado físico de una función de densidad lineal, finalmente se llegará a la misma conclusión; pero para la mayoría de la gente esto es un proceso posterior que no habría sido motivado sin el análisis matemático.

Por último, note que esta gran simplificación en el análisis es posible solamente para una función lineal de la densidad. En general, se puede escribir

$$\rho = \rho_0 + bc + \phi(c)$$

donde $\phi(c)$ contiene la parte no lineal de la relación. La ecuación resultante para h que depende ahora explícitamente de la concentración es:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(\psi_1 q_1 + \psi_2 q_2 - q_3)$$

donde

$$\psi_1 = \frac{\rho_0 + \phi(c_1) - c_1\phi'(c_3)}{\rho_0 + \phi(c_3) - c_3\phi'(c_3)}, \qquad \psi_2 = \frac{\rho_0 + \phi(c_2) - c_2\phi'(c_3)}{\rho_0 + \phi(c_3) - c_3\phi'(c_3)}$$

$\phi'(c_3)$ es la función $d\phi/dc$ evaluada en $c = c_3$. Solamente en los casos más excepcionales ψ_1 y ψ_2, serán tan diferentes a la unidad como para tener un efecto perceptible sobre los resultados.

4.6 CONCLUSIONES

El problema físico estudiado en este capítulo es un problema elemental y fácilmente comprensible. Esto permite concentrarse sobre la parte del desarrollo del modelo en el proceso del análisis. Revise las secciones 4.2, 4.4 y 4.5, y compárelas con el procedimiento bosquejado en la figura 3.8. Note en la sección 4.5 la importancia de establecer la relación básica densidad-concentración.

El enunciado matemático del principio de la conservación de la masa que aparece primeramente en el capítulo, como la ecuación 4.3 es una expresión en términos de una integral. A menudo, los estudiantes están confusos respecto a la necesidad de manipular la ecuación de manera que incluya derivadas, como en la ecuación 4.5 que es claramente equivalente. Recuerde que a menos que se conozca $q(t)$ en forma explícita como función del tiempo, no es posible efectuar la integración de la ecuación 4.3. Por ejemplo, no se podría hacer la integración, para el caso $q = kh^{1/2}$, ya que

$h(t)$ se conoce solamente en función de un integral de $h(t)$. Por otro lado, la ecuación 4.5 puede manipularse posteriormente, utilizando el cálculo para obtener una solución. El problema del control en la sección 4.3, es un caso donde la ecuación 4.10 en forma de derivada podría resolverse como la ecuación 4.11. Si se tuviese la ecuación de control:

$$q = q^* + K[h - h^*]$$

en la forma integral de la ecuación 4.3 habría sido posible proceder posteriormente.

La sección 4.3, donde las ecuaciones del modelo son utilizadas para el diseño de un sistema de control, se incluye entre las secciones del desarrollo del modelo con objeto de proporcionar cierta práctica en la lectura de los enunciados matemáticos. Los procedimientos matemáticos se simplifican mediante la nueva nomenclatura que se introduce en esa sección, pero es muy fácil perder de vista el significado físico de las variables. Por lo general, para material de este tipo, es útil para mantener una lista de símbolos y de sus significados, a medida que se vuelve a leer la sección.

El supuesto del tanque perfectamente mezclado, que se introduce primeramente en la sección 4.4, es un concepto que siempre se utiliza en el análisis de ingeniería para tanques de diversas formas. Aun cuando no sea una descripción exacta de la realidad física, el caso de mezcla perfecta proporciona un importante caso límite de funcionamiento posible. Vea la comprobación experimental del supuesto de mezcla perfecta para el sistema sal-agua fácilmente agitable. Es muy importante el enfoque para el estado estable del sistema sal-agua, siguiendo varios tiempos de residencia. La mayoría de los procesos industriales opera en condiciones constantes, y éstas son las que se toman en cuenta para el diseño de equipo.

Existen varios textos sobre simulación y matemáticas aplicadas escritos especialmente para ingenieros químicos. Generalmente, los enfoques están a un nivel más elevado que el necesario para este texto, pero puede ser de interés consultarlos.

4.1 C. M. Crowe, A. E. Hamielec, T. W. Hoffman, A. I. Johnson, P. T. Shannon, and D. R. Woods, *Chemical Plant Simulation,* Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, 1971.

4.2 R. G. E. Franks, *Mathematical Modeling in Chemical Engineering,* Wiley, Nueva York, 1966.

4.3 V.G. Jenson y G.V. Jefferies, *Mathematical Methods in Chemical Engineering,* Academic, Nueva York, 1963.

4.4 W. R. Marshall y R. L. Pigford, *The Application of Differential Equations to Chemical Engineering Problems,* Univ. of Delaware Press, Newark Del., 1947.

4.5 H. S. Mickley, T. K. Sherwood y C. E. Reed, *Applied Mathematics in Chemical Engineering*, McGraw-Hill, Nueva York, 1957.

Una parte muy importante en el proceso de análisis es tener acceso a los experimentos realizados por otras personas. En la siguiente bibliografía se encuentran disponibles esos datos:

4.6 J. H. Perry, *Chemical Engineers' Handbook*, 4th ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1963.

4.7 *International Critical Tables*, McGraw-Hill, Nueva York, 1926-1930.

4.8 *Handbook of Chemistry and Physics*, 52nd ed., Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, 1971.

También será conveniente tener un texto sobre la estimación de las propiedades físicas, en base a la estructura molecular:

4.9 R. C. Reid y T. K. Sherwood, *The Properties of Liquids and Gases*, 2nd ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1966.

4.7 PROBLEMAS

4.1 Se corta a la mitad un tanque cilíndrico de radio R para hacer una sección de longitud L, que cuando se coloca horizontalmente forma parte de una unidad procesadora de alimentos. Si el tanque es alimentado con una corriente a una velocidad de flujo volumétrico constante q_f, desarrolle una expresión algebraica que relacione h (la altura del líquido en la sección) con q_f, R, L, t (tiempo en segundos) y la altura inicial h_0.

4.2 Se utiliza un tanque esférico de acero inoxidable para suministrar materia prima a una unidad de procesamiento semi-intermitente. El líquido se elimina del tanque mediante una válvula que se encuentra en el fondo, presionando el sistema con nitrógeno. La velocidad de flujo volumétrico del tanque, q, se mantiene constante mediante un sistema que variará la presión del nitrógeno que se halla por encima del líquido. Para diseñar este sistema debe derivarse una relación entre h, la altura de fluido en cualquier tiempo, y q. Encuentre esta relación; el radio del tanque es de 5 ft.

4.3 Considere un recipiente de forma tal, que cuando el agua es desalojada a través de un orificio, el nivel cambia a una velocidad constante, de tal manera que pueda utilizarse como un reloj de agua. Suponiendo que la velocidad de flujo a través del orificio es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del líquido, determine la forma del recipiente.

4.4 Un tanque de almacenamiento diseñado para aceptar el efluente de una pequeña planta química opera de tal manera que el flujo del tanque, q, es proporcional a h ($q = bh$). La alimentación al tanque es intermitente, pero la velocidad de flujo cuando el líquido entra es constante a 80 ft^3/seg. El tanque cilíndrico tiene 30 ft de diámetro y 10 ft de profundidad.

(a) Derive la descripción matemática para esta situación y exprese h como una función de flujo de entrada q_f, b, t; el área del tanque A, y la altura inicial del líquido h_0.

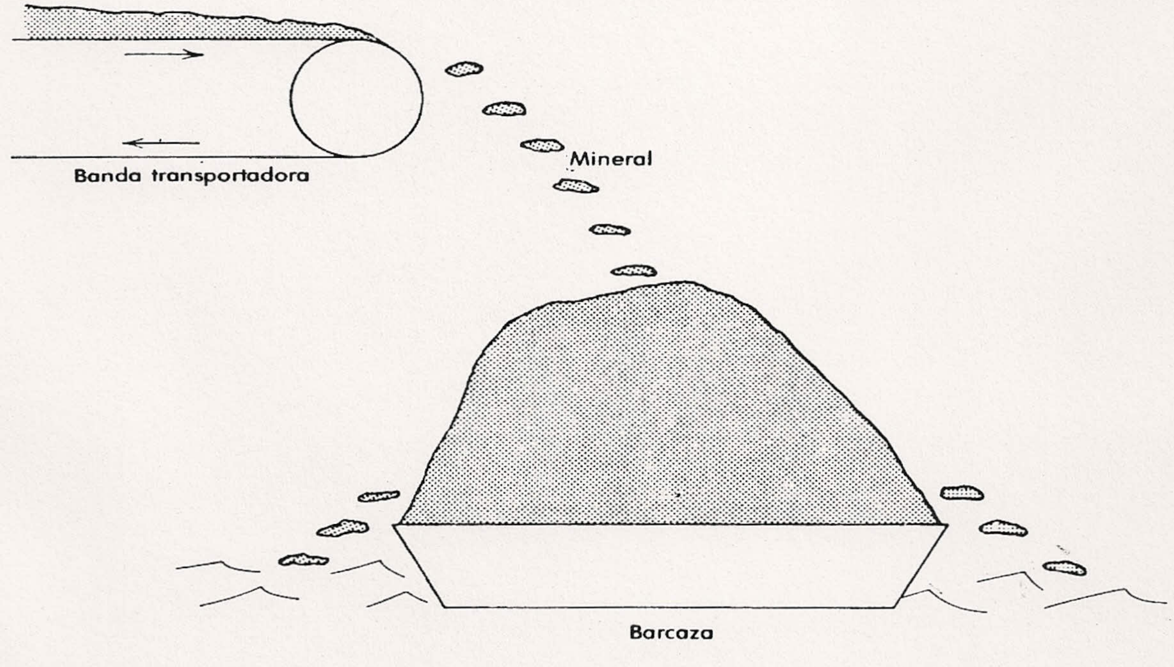
(b) Experimentalmente se encuentra que b es igual a 8 ft^2/seg cuando la válvula del drenado del tanque está totalmente abierta. Si el tanque está vacío inicialmente, y la válvula del drenado abierta, ¿cuánto tiempo permanecerá fluyendo la corriente de alimentación antes de desbordar el tanque?

(c) Si se duplica la velocidad de flujo de la corriente de alimentación. ¿Cuánto tiempo será necesario para desbordar el tanque, si éste está vacío inicialmente?, ¿está totalmente abierta la válvula de drenado?

(d) Si el tanque contiene 8 ft de líquido cuando la válvula del drenado está abierta. ¿Cuánto tiempo será necesario para que el nivel alcance 4 ft sin que entre líquido?

(e) Si el tanque contiene 8 ft de líquido cuando la válvula del drenado está abierta. ¿Cuánto tiempo deberá mantenerse abierta la corriente de alimentación del tanque sin que haya desbordamiento?

4.5 El sistema mostrado en la figura deberá usarse para cargar mineral en barcazas para su embarque. Sea W_1 = velocidad de flujo del



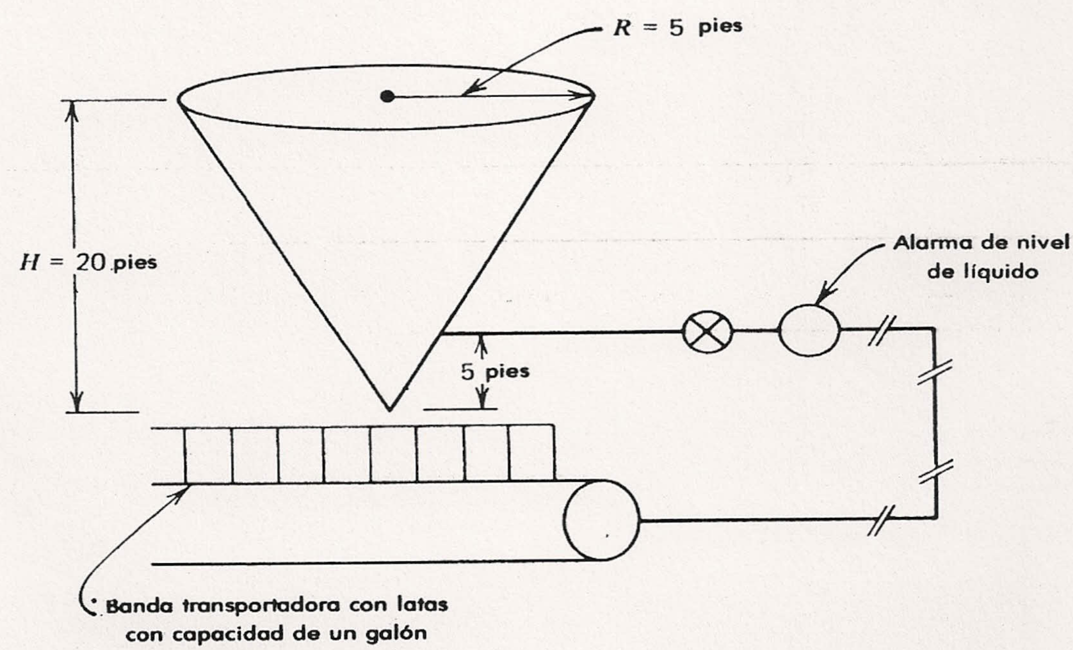
mineral a la barcaza, en toneladas por hora, y $M =$ masa del mineral en cualquier tiempo, en toneladas. Después de que la pila ha alcanzado una masa de M_0, se pierde mineral a los lados de la barcaza por deslizamiento a una velocidad de W_2 toneladas/hora. La velocidad de pérdida es aproximadamente proporcional a la cantidad de mineral de M_0 que está en exceso en cualquier tiempo.

(a) Derive la descripción matemática para esta situación.

(b) Exprese el tiempo requerido para que el mineral en la barcaza alcance una masa M_0 en términos de la velocidad de flujo constante W_1.

(c) Derive una relación algebraica que demuestre que M es una función de t para $M > M_0$. ¿Qué sucede cuando $t \to \infty$?

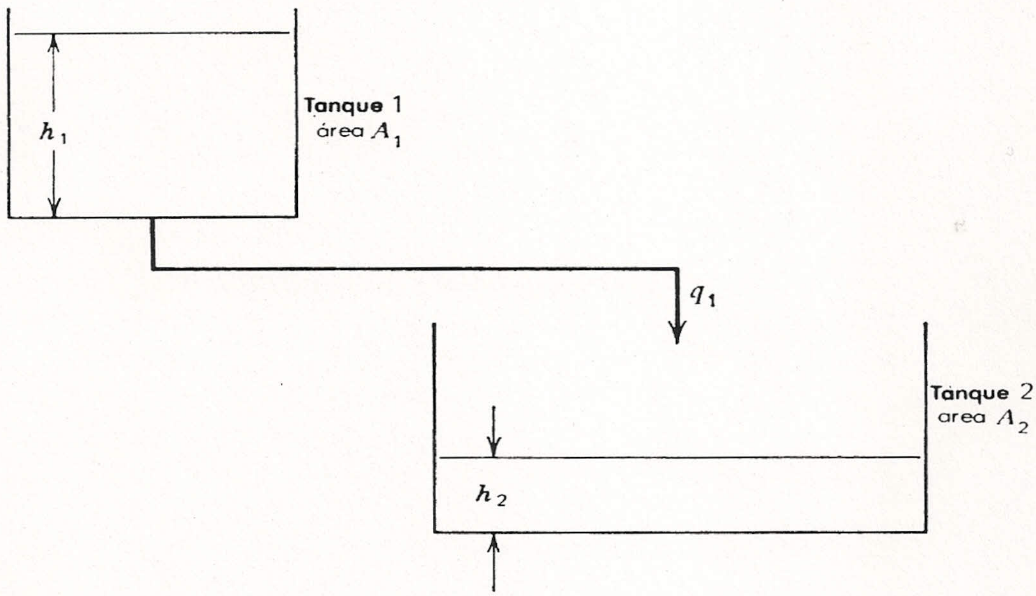
4.6 Un cono circular de radio $R = 5$ ft y altura $H = 20$ ft se llena hasta el borde, de tal manera que pueda alimentar una línea transportadora de latas de un galón. El sistema ha sido diseñado con un cierre automático que detiene la operación cuando la altura del líquido está a 5 ft por encima del vértice del cono. Esto se hizo para asegurar un flujo constante del tanque. La velocidad de flujo del tanque es de 30 gal/min, y la velocidad de la banda transportadora se ajusta de tal manera que cada lata recibe un galón.



(a) ¿Cuánto tiempo permanecerá funcionando el sistema antes de que el controlador del nivel detenga la operación?

(b) Derive una expresión para la altura del líquido h como función del tiempo.

4.7 Un tanque cilíndrico de área seccional A_1 contiene líquido hasta una altura h_{10}. En el tiempo $t = 0$ una línea que conecta este tanque con un tanque cilíndrico vacío de área seccional A_2, se abre y el primer tanque descarga en el segundo. La configuración se muestra en la siguiente figura:



Designe la altura en el primer tanque y en el segundo, mediante h_1 y h_2, respectivamente, y desarrolle un modelo matemático que relacione h_2 con A_1, A_2, h_{10}, y t. Calcule $h_2(t)$ cuando q_1 depende de h_1 en cada una de las siguientes formas:

(a) $q_1 = bh_1$

(b) $q_1 = kh_1^{1/2}$

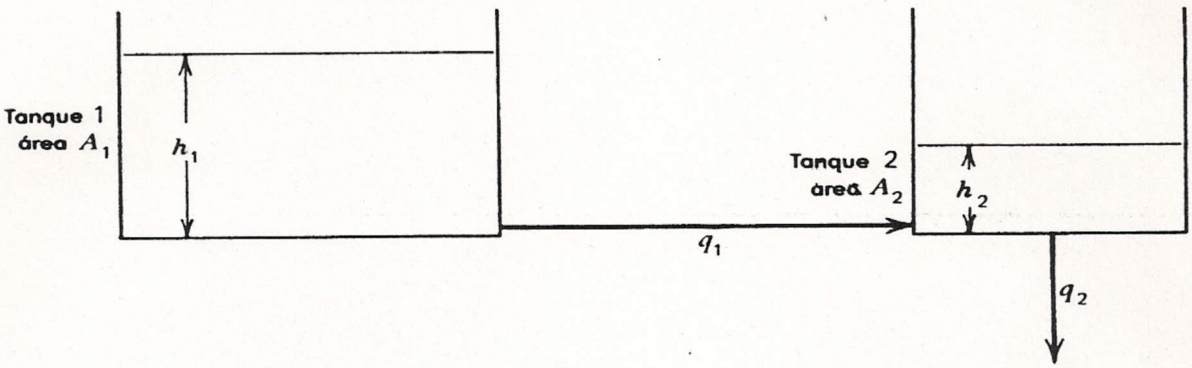
4.8 Se conectan dos tanques según se muestra en la figura. Se puede suponer que las velocidades de flujo q_1 y q_2 son:

$$q_1 = b_1[h_1 - h_2]$$

$$q_2 = b_2 h_2$$

(a) Desarrolle la descripción matemática para esta situación en forma de dos ecuaciones diferenciales de primer orden en h_1 y h_2.

(b) ¿Por qué no se puede resolver este conjunto de ecuaciones en la misma forma que en el problema 4.7?



4.9 Repita los cálculos y las cifras de la sección 4.3 cuando la perturbación en la corriente de alimentación tenía la forma:

$$\text{(a) } q_f = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T_1 \\ \beta[t - T_1], & T_1 \leq t < T_2 \\ 0, & T_2 \leq t \end{cases}$$

$$\text{(b) } q_f = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T_1 \\ \alpha \operatorname{sen} \omega[t - T_1] & T_1 \leq t \end{cases}$$

4.10 Se tienen disponibles los siguientes datos para la población de Islandia y las Islas Färoe.

Año	Nacimientos	Muertes	Población media.
1921	3215	1708	116,000
1922	3214	1491	118,000
1923	3264	1542	119,000
1924	3150	1730	120,000
1925	3153	1457	122,000
1926	3267	1320	124,000
1927	3221	1449	126,000
1928	31[illegible]2	1318	128,000
1929	3219	1490	130,000
1930	3441	1522	132,000

Sin considerar la inmigración y la emigración, construya un modelo matemático para la población como una función del tiempo y compare con la población real.

(a) Suponga que las tasas de natalidad (flujo de entrada) y de mortalidad (flujo de salida) son constantes, utilizando un valor promedio.

(b) Suponga que las tasas de nacimientos y muertes son fracciones constantes de la población total.

4.11 Los siguientes datos indican la población de los Estados Unidos durante el periodo 1930 - 1960.

Año	Nacimientos por cada 1000 hab	Muertes por cada 1000 hab	Población en millones
1930	21.3	11.3	123
1940	19.4	10.8	132
1950	24.1	9.6	151
1960	23.7	9.5	179

Aquí no se consideran la inmigración y la emigración. Construya un modelo para un crecimiento de la población, y compare la predicción, con la población real de 1970 de 202 millones de habitantes.

4.12 Los bancos anuncian comúnmente, el interés compuesto continuado, mediante el cual quieren indicar que el interés se suma a una cuenta en una tasa que equivale al producto del saldo de dicha cuenta por la tasa de interés dividida entre 100. Elabore un modelo para un saldo de cuenta como una función del tiempo con un interés compuesto continuo de 5 por ciento anual, y compare con intereses compuestos en forma anual, semestral y trimestral.

4.13 Un recipiente completamente agitado contiene en el momento en que se introduce una corriente de agua pura, 450 galones de una solución de agua y 75 lb de cloruro de sodio. Encuentre la concentración de sal al final de una operación de 60 min, si el flujo de agua que entra al tanque se mantiene a razón de 7 gal por min, y se elimina salmuera a la misma velocidad.

4.14 Durante el arranque del proceso descrito anteriormente se toman los siguientes pasos para el recipiente de 450 gal:

(a) Se mezclan 75 lb de sal con agua en el tanque hasta que toda la sal está disuelta y forma una mezcla uniforme de 100 gal de salmuera.

(b) Cuando esto se logra se introduce una corriente de agua pura a una velocidad de 7 gal/min. Cuando se alcanza la capacidad líquida del tanque (450 gal), se utiliza una línea de desborde que mantiene el sobreflujo del tanque igual al flujo de entrada.

Desarrolle una descripción matemática del proceso, suponiendo que la densidad de la salmuera es una función lineal de la concentración de la sal, y obtenga la concentración de la sal como una función del tiempo antes y después de llenar el tanque con líquido.

4.15 Un recipiente de proceso que funciona en condiciones constantes mezcla corrientes de salmuera a velocidades de flujo de alimentación de 10 y 15 ft^3/ min, con concentraciones de sal con 10 y 17 lb_m/ft^3, respectivamente. ¿Cuál es la concentración de la sal en la corriente de salida?

4.16 El Mar Mediterráneo intercambia agua con el Océano Atlántico. El flujo de agua fresca que va hacia el Mediterráneo es aproximadamente de 30,000m^3/seg, y hay evaporación a una velocidad aproximada de 80,000m^3/seg. El contenido de sal del Mediterráneo es de 37 g de sal por 1000 g de solución, y en el Océano Atlántico es de 36 g por 1000 g. Calcule el flujo del mar hacia el océano, y del océano hacia el mar.

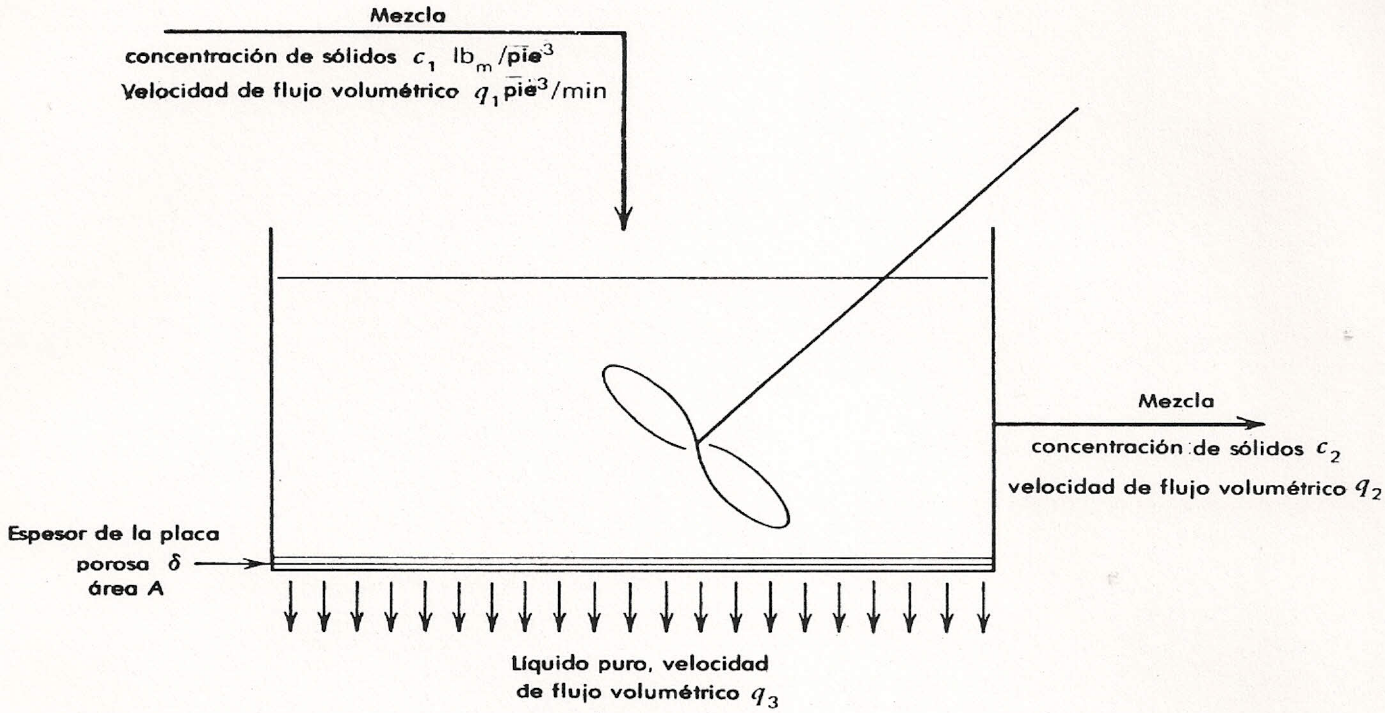
4.17 Un tanque contiene 100 gal de salmuera con 50 lb_m de sal disuelta. Se introduce agua pura al tanque a una velocidad de 2 gal/min, mientras que el efluente fluye hacia un segundo tanque que inicialmente está vacío, a una velocidad de 3 gal/min. El segundo tanque se vacía a una velocidad constante de 2 gal/min. Formule la descripción matemática con la que será posible calcular la concentración de sal en el segundo tanque como una función del tiempo. Resuelva la ecuación si conoce bien las ecuaciones diferenciales de primer orden, sección 15.10.

4.18 Un tanque perfectamente agitado que contiene sal disuelta es alimentado con una corriente de agua pura a una velocidad de flujo $q_1(ft^3/min)$ y una corriente de salmuera de concentración $c_2(lb_m/ft^3)$ y una velocidad de flujo $q_2(ft^3/min)$. La velocidad de flujo de salida del tanque es $q_3(ft^3/min)$, desarrolle una expresión para c_3, la concentración de la sal en el tanque, y h la altura del líquido en el tanque como funciones del tiempo. La altura inicial del líquido es h_0 y la concentración inicial de sal en el tanque es c_{30}. Se puede suponer que la relación entre densidad y concentración es la forma $\rho = \rho_0 + bc$.

4.19 Una mezcla perfectamente dispersada de sólidos y líquidos va a concentrarse mediante bombeo a través de un tanque con fondo poroso, a través del que sólo puede pasar el líquido puro, según se muestra esquemáticamente en la figura. Debido a que la dispersión es buena se puede considerar que la mezcla es un líquido homogéneo con concentración de sólidos c. (Vea la figura en la pág. 110.)

(a) Demuestre que la densidad de la mezcla es una función lineal de c. El volumen total V es la suma de los volúmenes sólidos V_S y el volumen líquido V_L.

(b) Suponga que la velocidad de flujo volumétrico q_3 depende de la densidad del líquido ρ_L y viscosidad μ_L, el área del plato A, y el



cambio de presión por unidad de espesor en el plato, $\Delta p/\delta$. Haga un análisis dimensional y observaciones experimentales del flujo de agua pura a través de una placa porosa para comprobar que en este caso la gráfica del log de h en función del tiempo, es lineal, para el flujo y obtenga una ecuación básica para q_3.

(c) Obtenga la ecuación de diseño para el estado constante relacionando el área del tanque y el volumen con el gasto líquido, y el grado de concentración deseado.