CAPITULO 3

Fuente de las ecuaciones del modelo

3.1 INTRODUCCION

El análisis de un fenómeno físico principia con la formulación de una descripción matemática adecuada. Es evidente que este paso es fundamental para el análisis, ya que todos los pasos subsecuentes descritos en el capítulo 2 presuponen que se dispone de una descripción matemática. Por tanto, en este capítulo y en los posteriores, se dará un gran énfasis al desarrollo de un proceso sistemático para expresar en términos matemáticos precisos la descripción de una situación física.

En la figura 3.1 se muestra un proceso para elaborar un modelo matemático de una situación física sumamente sencilla. Suponga que se quiere describir el comportamiento de una parte del equipo para procesar, como el tanque en el capítulo anterior. El primer paso es seleccionar las que se llamarán *variables dependientes fundamentales.* Es decir, el conjunto de cantidades cuyos valores en cualquier tiempo contienen toda la información acerca de procesos, necesaria para investigar cualesquiera fenómenos. En la mayoría de los problemas sólo nos interesan tres de estas variables fundamentales: masa, energía y cantidad de movimiento. Por ejemplo, en el capítulo 2 la descripción del vaciado de un tanque sólo hace alusión a la masa y no se menciona la cantidad de movimiento ni la energía.

En muchos casos las variables dependientes fundamentales no se miden en forma adecuada. Por ejemplo, en el problema relativo al vaciado del tanque, aunque la masa es la variable fundamental, en realidad no se miden la densidad del líquido, ρ, y la altura, h, del mismo. Estas dos cantidades, junto con el área del tanque, A, caracterizan la masa. Por tanto, el siguiente paso en el proceso es la selección de *las variables dependientes características*, que son aquellas variables que pueden ser medidas convenientemente y pueden agruparse en forma adecuada, para determinar el valor de las variables fundamentales. En un proceso, la masa, energía y cantidad de movimiento pueden estar caracterizados por la densidad, temperatura, presión, velocidad de flujo, etc. Generalmente, es necesaria más de una variable caracterizante para cada variable fundamental. El valor de todas las variables que caracterizan cualquier tiempo y cualquier punto en el espacio, define el *estado* del sistema, y por lo tanto, las variables caracterizantes se denominan algunas veces variables de estado.

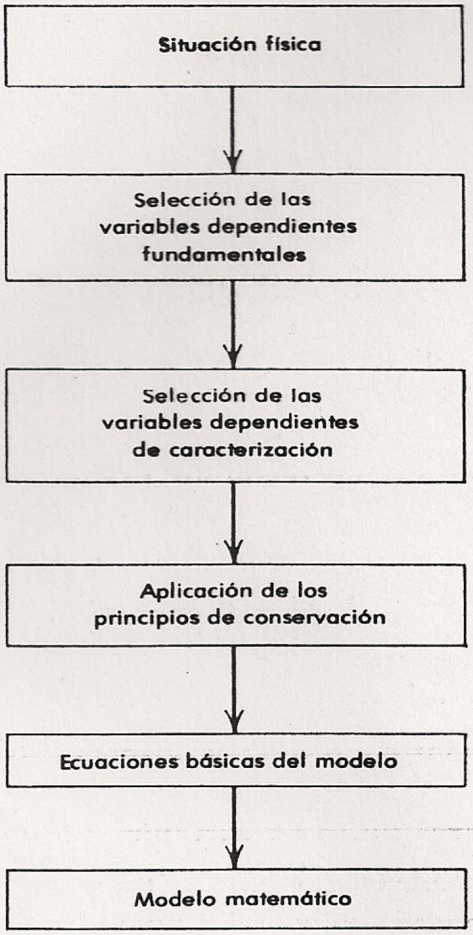

FIGURA 3.1 Desarrollo de un modelo para casos específicos sencillos con una variable dependiente.

La ecuación básica del modelo, relación existente entre las variables dependientes del problema y las variables independientes, se deduce aplicando las leyes de conservación. Hay cuatro variables independientes que conciernen a los problemas de ingeniería: el tiempo, t, y las coordenadas necesarias para establecer una posición en el espacio, x, y y z. La selección de las variables dependientes e independientes pertinentes es una de las tareas más importantes en el desarrollo del modelo de un caso específico. Para esta selección es posible establecer un procedimiento sistemático, examinando la forma en que se emplean las leyes de la conservación.

3.2 ECUACIONES DE LA CONSERVACION

La etapa cuantitativa básica en la formulación de modelos es la aplicación de los principios fundamentales de la conservación en física: conservación de masa, energía y cantidad de movimiento. Esta etapa que se estudiará posteriormente conduce a las llamadas ecuaciones básicas del modelo. El empleo de las leyes de la conservación es esencialmente un proceso contable, en el que se lleva un balance para la masa, energía, o cantidad de movimiento en el proceso.

Considere una región del espacio delimitada para fines de "contabilidad" por una superficie (ficticia), que se denominará "superficie de control" y el volumen comprendido en esa superficie como "volumen de control". La cantidad que va a observarse, puede ser masa, momento o energía, y se llamará X (véase figura 3.2). La ley de la conservación se puede enunciar como sigue:

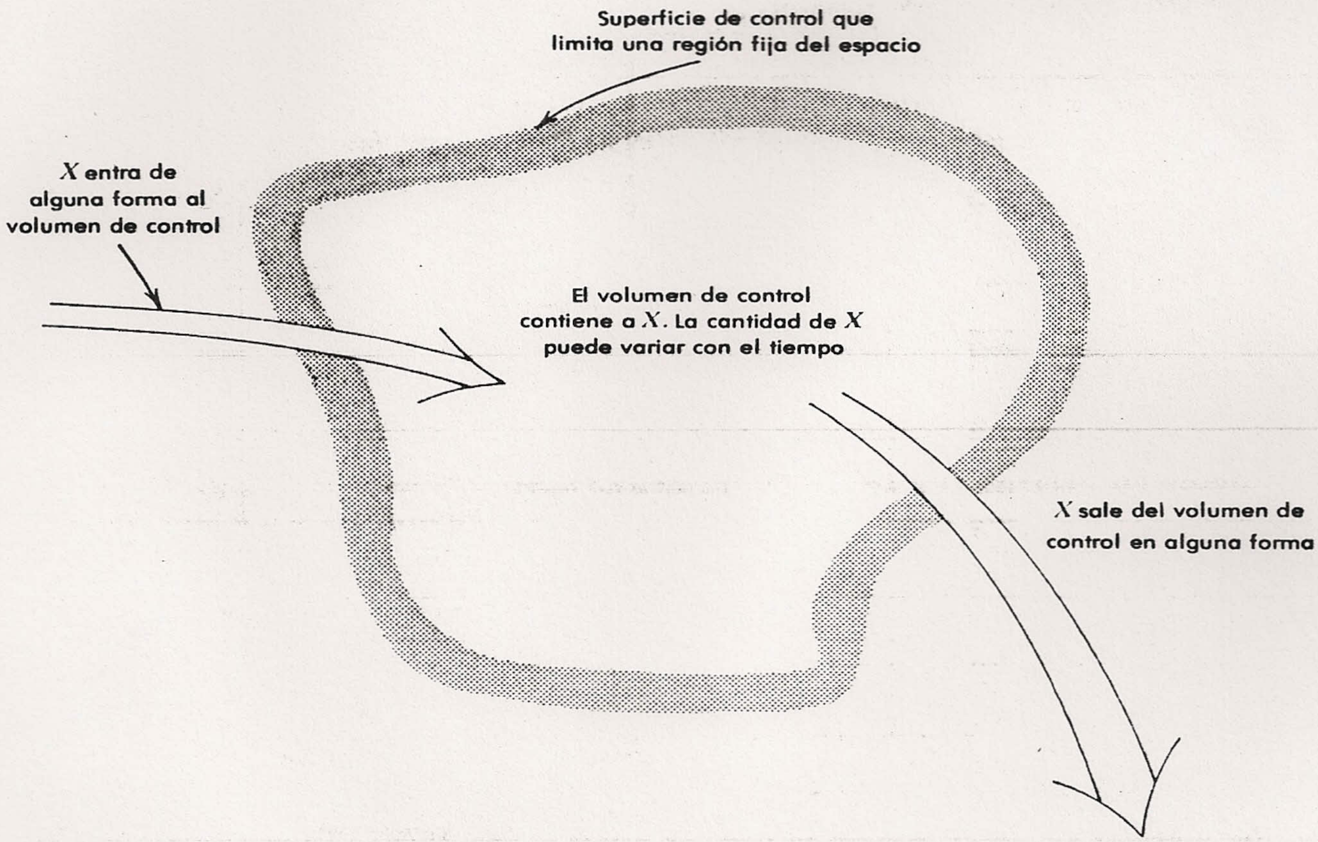

FIGURA 3.2 Una superficie de control limita un volumen de control al que se aplica la ley de la conservación.

La cantidad total de X contenida dentro del volumen de control en el tiempo t_2 debe ser igual a la cantidad total de X contenida dentro del volumen de control en el tiempo t_1, más la cantidad total de X que aparece en el volumen de control en el intervalo de tiempo t_1 a t_2 en todos los procesos, menos la cantidad total de X que desaparece del volumen de control en el intervalo de tiempo t_1 a t_2 para todos los procesos. Este enunciado verbal se expresa parcialmente en símbolos de la siguiente manera:

$$X|_{t_2} = X|_{t_1} + \text{cantidad de } X \text{ que entra durante } (t_1, t_2)$$
$$- \text{ cantidad de } X \text{ que sale durante } (t_1, t_2)$$

Observe que la masa y la energía son cantidades escalares, mientras que la cantidad de movimiento tiene una dirección asociada; por tanto, debe considerarse por separado la conservación de la cantidad de movimiento para cada dirección coordenada.

Considere, por ejemplo, el problema común del llenado de un tanque

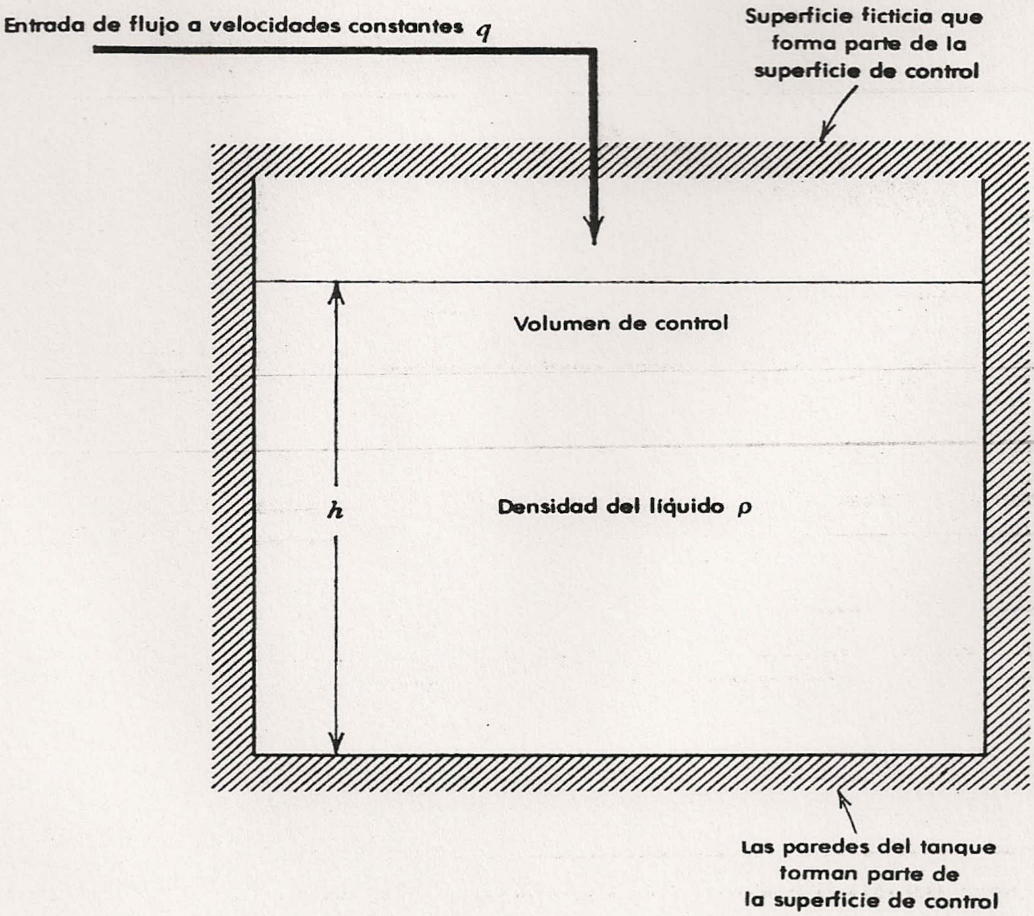

FIGURA 3.3 Volumen de control para un tanque que se llena con líquido de densidad constante.

con una corriente de velocidad *constante* de flujo q, ft^3/seg. La variable dependiente fundamental es la masa, expresada por las variables caracterizantes ρ, A, y h. Si se desea calcular la acumulación de masa dentro del tanque, el volumen de control es simplemente el volumen del tanque. La superficie de control, mostrada en la figura 3.3 está formada tanto por las paredes del tanque y su fondo, como por una superficie ficticia trazada a lo largo de la parte superior del tanque. Dado que solamente se desea calcular la masa total y ningún otro elemento de un punto particular en el espacio, el tiempo es la única variable independiente del problema. La variable dependiente fundamental de importancia es la masa, y se aplica la ley de la conservación de la masa como sigue.

La cantidad total de masa (ρAh) contenida dentro del volumen de control (el tanque) en el tiempo t_2 es igual a la cantidad total de masa (ρAh) contenida dentro del volumen de control en el tiempo t_1, más la cantidad total de masa que ha entrado al volumen de control durante el intervalo de tiempo t_1 a t_2 ($\rho q[t_2 - t_1]$), menos la cantidad de masa que ha salido del volumen de control (ninguna). Expresado en símbolos se tiene:

$$\rho Ah|_{t_2} = \rho Ah|_{t_1} + \rho q[t_2 - t_1] - 0[t_2 - t_1]$$

Este enunciado se puede volver a expresar en función de las variables dependientes caracterizantes y del tiempo en la forma que se estudiará en el siguiente capítulo. El modelo matemático resultante es:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho Ah}{dt} &= \rho q \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{q}{A} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Puesto que q y A son constantes, la ecuación 3.1 puede resolverse fácilmente para obtener h en función de t:

$$h(t) = h_0 + \frac{q}{A} t$$

Como ya se vio en el problema relativo al vaciado de un tanque, el proceso descrito en la figura 3.2 solamente es útil para situaciones muy sencillas. Nuevamente considere el problema del vaciado de un tanque en este contexto. El problema del vaciado es similar al problema de llenado en que se utiliza el mismo volumen de control y las mismas variables caracterizantes (figura 3.4). El enunciado de la ley de la conservación de la masa es el siguiente.

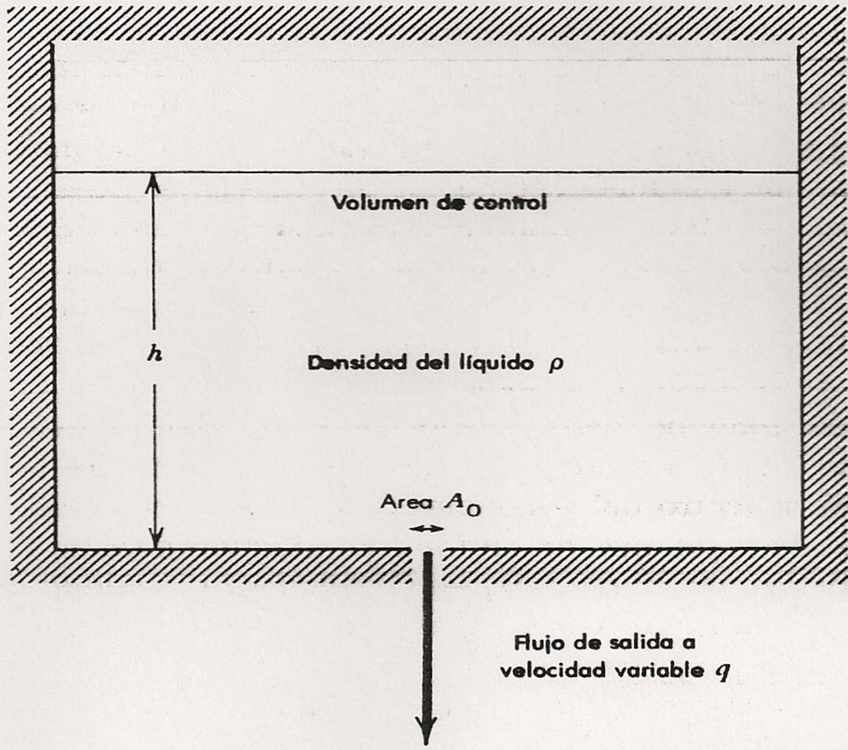

FIGURA 3.4 Volumen de control para un tanque que contiene líquido de densidad constante que se vacía a través de un orificio en el fondo.

La cantidad total de masa $(\rho A h)$ contenida dentro del volumen de control (el tanque) en el tiempo t_2 es igual a la cantidad total de masa $(\rho A h)$ contenida dentro del volumen de control en el tiempo t_1, más la cantidad total de masa que ha entrado al volumen de control durante el intervalo de tiempo t_1 a t_2 (ninguna), menos la cantidad total de masa que ha salido del volumen de control en forma de flujo a través del orificio, durante el intervalo de tiempo t_1 a t_2.

Como la velocidad de salida de flujo no es constante, la cantidad que sale entre t_1 y t_2 no puede expresarse de manera intuitiva como la cantidad que entró, en el problema de llenado, de manera que la representación simbólica se hará en el siguiente capítulo. La ecuación final resultante es:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{q}{A} \tag{3.2}$$

En la ecuación 3.2 hay dos incógnitas q y h (q era una constante en el problema de llenado). Puesto que en el modelo solamente hay una ecuación, es claro que se necesita otra relación. Es necesario modificar el procedimiento general ilustrado en la figura 3.1 que permite rectificar si hay suficientes ecuaciones para describir el estado del sistema. La figura 3.5 incluye una recirculación que permite que haya una interacción de este tipo y si es necesario, la inclusión de otras variables fundamentales. En el problema del vaciado de un tanque se demostrará (en el capítulo 10) que la masa por sí sola no es suficiente y que considerar la ley de la conservación de la energía ayuda a entender el problema. La ecuación 3.2 puede integrarse utilizando la relación correcta que existe entre q y h que se obtiene al aplicar la conservación de la energía.

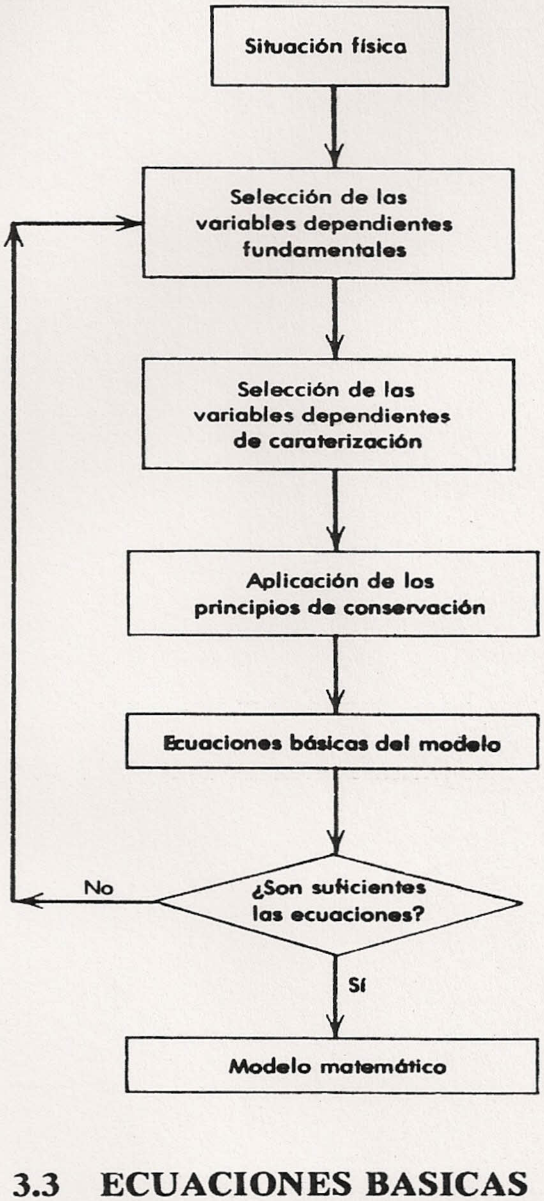

Figura 3.5 Desarrollo de un modelo para casos específicos que requieren más de una variable dependiente.

3.3 ECUACIONES BASICAS

En principio, la secuencia indicada en la figura 3.5 muestra cómo se aplican las leyes de la conservación para obtener un modelo matemático completo. Sin embargo, en muchos casos en ingeniería, no es necesario o no es conveniente, o en situaciones realmente complejas no es posible obtener la información necesaria para la aplicación directa de las leyes de conservación, y de los otros principios físicos fundamentales. (Considere por ejemplo, la descripción de las interacciones complejas de los millones de moléculas gaseosas contenidas en un recipiente como consecuencia de la aplicación directa del principio de la atracción gravitacional y de las leyes de la conservación.) Por tanto, el procedimiento todavía necesita ser modificado. Se define en una forma operacional un nuevo tipo de relación llamada *relación básica* (ver figura 3.6). La búsqueda de esta relación básica se inicia luego de que uno se percata de la necesidad de otras relaciones, las cuales no es posible obtener aplicando las leyes de la conservación a un nivel medio de complejidad. La ecuación básica puede deducirse completamente a partir de la experimentación. Puede tener una forma sugerida por una teoría, pero también tendrá algunos parámetros evaluados experimentalmente. Se puede obtener totalmente sobre bases teóricas, por ejemplo, aplicando las leyes de la conservación a nivel molecular y utilizando la mecánica cuántica y la estadística. O bien, obtenerse por una combinación lógica de cualquiera de los métodos anteriores. Al buscar la relación o relaciones básicas necesarias para algún problema en particular, se necesita entender plenamente la situación física; sin duda, a menudo no se obtienen resultados satisfactorios a menos que se efectúen experimentos como parte del programa para formular el modelo. El ejemplo del vaciado de un tanque muestra un caso en el que la relación constitutiva $q = 5.195h^{1/2}$ se dedujo totalmente por experimentación.

Es evidente, que al definir una ecuación básica como la relación necesaria para completar una descripción física después de haber utilizado los principios fundamentales, uno puede deducir que una ecuación básica es *específica*. Es una ecuación que se aplica a una sustancia o a un caso en particular, pero no tiene aplicación general. Un buen ejemplo lo constituye la relación existente entre presión, volumen, temperatura y número de moléculas de un gas, conocida como "ley de los gases ideales". En principio, la expresión:

$$pV = nRT$$

se propuso para representar en forma aproximada algunos experimentos realizados con gases a baja densidad. No representa el comportamiento de ningún gas real a alta densidad, y obviamente no es una ley sino la representación conveniente de un caso específico. Con frecuencia la "ley" se deduce en cursos de física o química básicas al aplicar los principios de conservación, después de hacer un gran número de suposiciones acerca de la naturaleza de un gas, las cuales sólo serán válidas a baja densidad. En muchos casos será inapropiado el uso de la ecuación del gas ideal por lo que deberá utilizarse una ecuación básica diferente y más exacta.

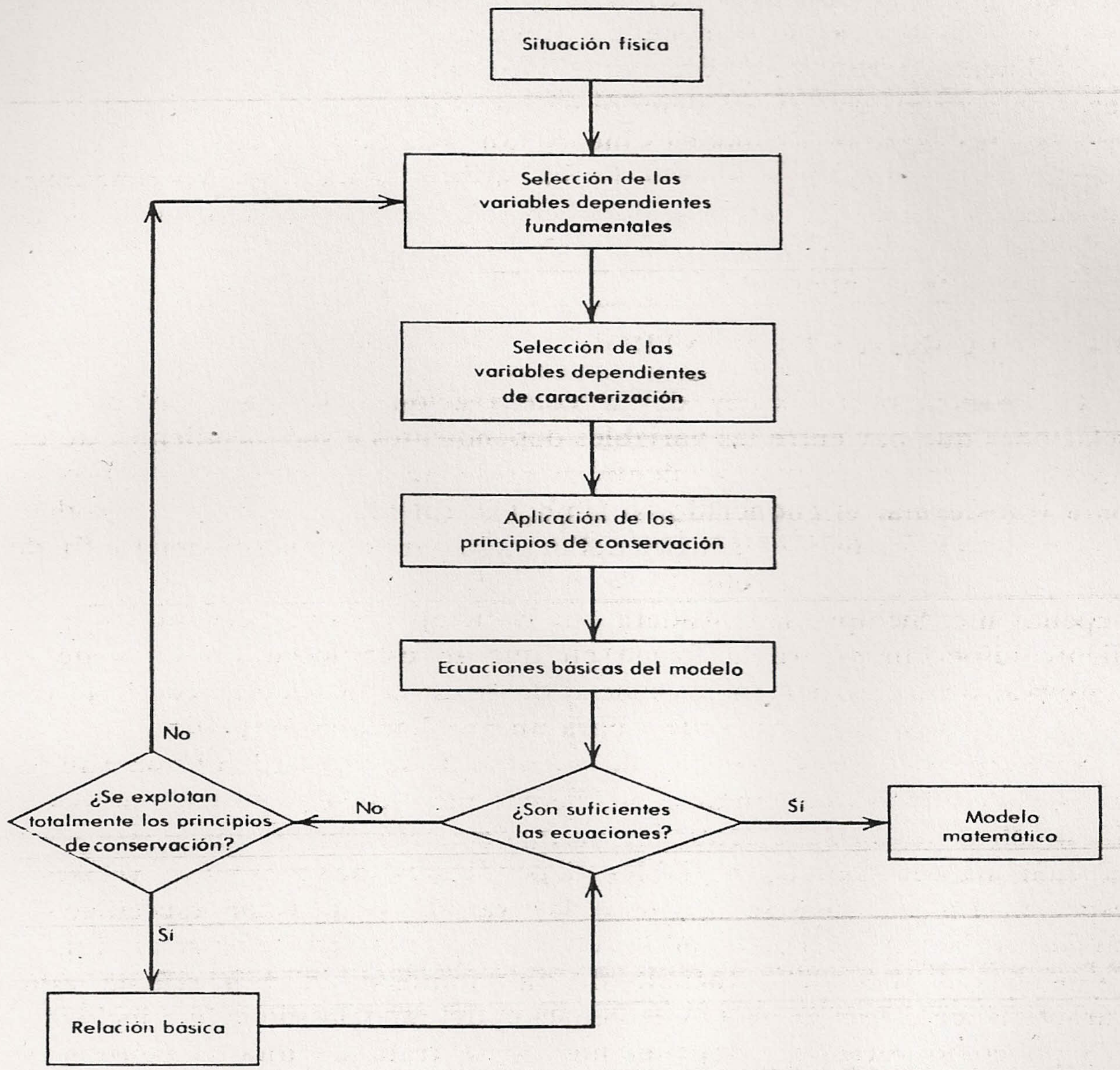

FIGURA 3.6 Desarrollo de un modelo utilizando una relación básica.

Existen muchas relaciones conocidas que se aplican a situaciones específicas. La densidad de una solución acuosa de cloruro de sodio depende de la concentración de soluto en forma diferente a lo que sucede con una solución acuosa de azúcar. La expansión del hierro por cada grado de temperatura es diferente a la del nylon. Una característica común de las relaciones de fácil discernimiento es que describen cuáles son los fenómenos esencialmente moleculares, fenómenos que, como diría un filósofo del siglo

XVIII, se pueden predecir al comprender las fuerzas existentes entre las moléculas y la física de los sistemas de gran cantidad de partículas. Existe otra categoría, que incluye casos tales como el problema del vaciado de un tanque. En estos casos, el ingeniero prefiere obtener una ecuación experimentalmente, porque es más fácil que hacer una aplicación detallada de las leyes de conservación. Casi siempre en las situaciones físicas complejas el proceso de desarrollo de modelos incluye un programa experimental perfectamente planeado o en alguna forma utiliza resultados experimentales previos. Es difícil hacer afirmaciones generales acerca de este último tipo de relación básica, puesto que cada problema es único, pero este enfoque se demostrará frecuentemente.

3.4 VOLUMENES DE CONTROL

El enunciado de la ley de la conservación sirve para obtener las relaciones que hay entre las variables dependientes e independientes de un problema. En el capítulo siguiente se explicará el procedimiento preciso para transformar el enunciado en símbolos. En esta sección, se considera una característica más en la lógica del proceso para obtener modelos a fin de que pueda tomarse en cuenta la dependencia espacial de la variable dependiente. Siempre se considera que el tiempo es una variable independiente importante para la forma en que se establecen las leyes de la conservación. La dependencia espacial tiene estrecha relación con la forma de definir un volumen de control para un problema en particular.

En los problemas y en el procedimiento que se ha tratado hasta aquí se ha considerado al volumen de control como parte del equipo para procesar. En muchos casos puede deducirse un modelo satisfactorio sobre esta base, el cual supone que las variables dependientes no presentan variación espacial. En ese caso se asigna a las variables un valor específico en cualquier instante, que es independiente de la posición espacial. En los problemas de llenado y vaciado de un tanque ρ, A y h reúnen estas características, de manera que la ecuación del modelo solamente incluye al tiempo como variable independiente. Si se trata de una suspensión de partículas sólidas en un líquido, ρ podría variar en un tiempo dado, conforme a la posición espacial debido al efecto de asentamiento producto de la gravedad, como se muestra en la figura 3.7. Si se quiere desarrollar el modelo de esta situación física, debe tomarse una decisión, o bien, ignorar el efecto y continuar con la formulación sencilla que utiliza el tiempo como única variable independiente, o seleccionar un nuevo volumen de control, y considerar la variación espacial perpendicular a la superficie terrestre. Si se desea seguir este último procedimiento, el nuevo volumen de control, puede ser un volumen parcial del tanque cuyo corte transversal sea A y su altura menor Δz, como se muestra en la figura, en la que ρ prácticamente no varía. (Note la similitud con los procedimientos del cálculo donde se utiliza una cantidad que varía continuamente, como si fuera una constante para propósitos prácticos durante un intervalo pequeño, como en la sección 15.6.) Con este volumen de control es posible aplicar las leyes de la conservación y continuar, pero ahora las ecuaciones finales dependen de la posición tanto de z, como de t. El caso más general dependerá de x, y z, y t.

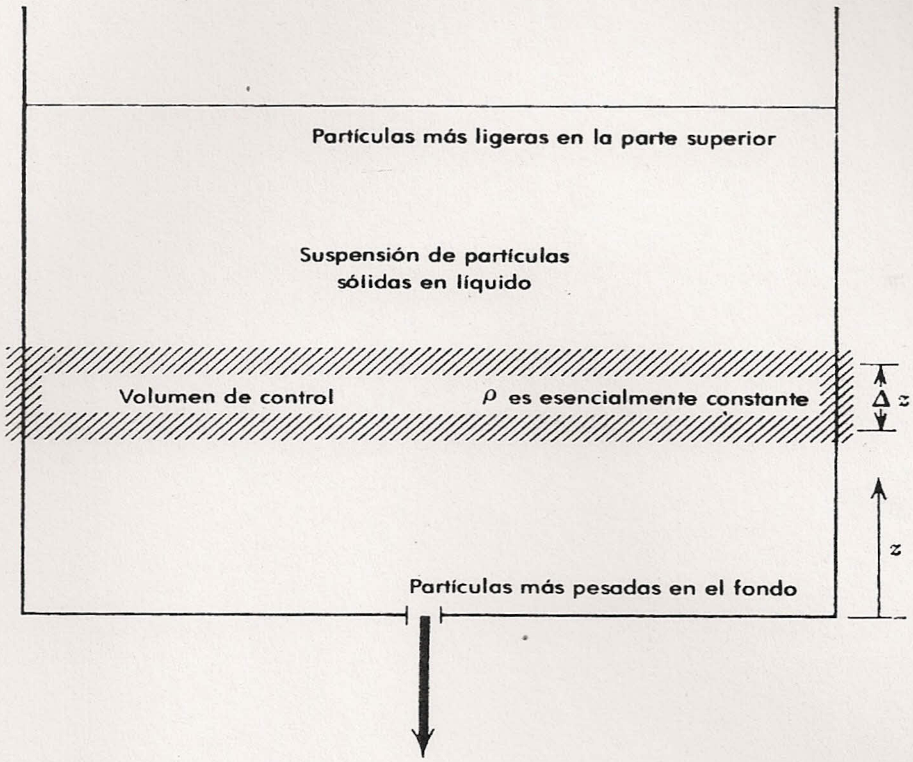

FIGURA 3.7 Volumen de control para un tanque que se vacía. La densidad del líquido depende de la posición.

La forma final del diagrama lógico de flujo se muestra en la figura 3.8, donde se agrega un paso que toma en cuenta la necesidad de seleccionar un volumen de control, en el que se especifican las variables caracterizantes mediante un valor único. Cuando es posible despreciar la variación de una variable dependiente en una dirección espacial, se dice que el modelo matemático es un modelo *concentrado* mientras que si se toma en cuenta la variación espacial, se dice que el modelo es *distribuido.* Esta terminología es poco precisa, ya que un modelo que toma en cuenta la variación en la dirección z, pero no en x y y, es agregado con respecto a las direcciones x y y, y distribuido con respecto a z. En este libro no se estudiará la variación espacial en más de una dirección, y al hablar de un modelo agregado será aquél donde el tiempo sea la única variable independiente. Inicialmente se dará mayor atención a los modelos agregados, y a los planteamientos de situaciones que lleven a un modelo de este tipo. En el capítulo 7 se tratarán también modelos distribuidos.

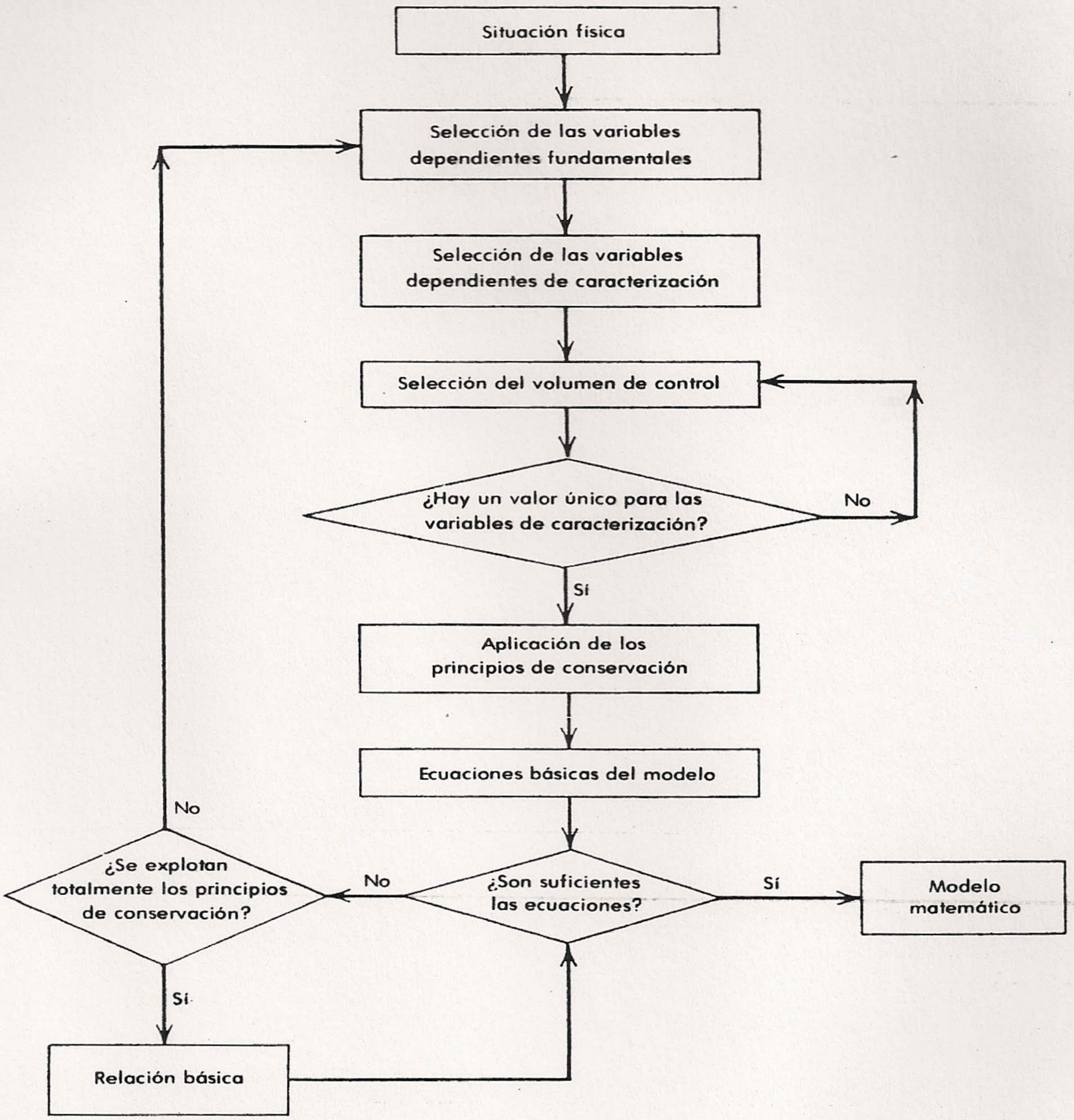

FIGURA 3.8 Desarrollo de un modelo para cualquier caso.

3.5 ANALISIS DIMENSIONAL

Cuando se buscan relaciones entre las variables que son necesarias para describir cualquier fenómeno físico, cada símbolo empleado representa una cantidad que tiene ciertas *dimensiones* definidas, como longitud o masa por volumen. Estas cantidades se miden en *unidades* que pueden elegirse arbitrariamente. Por ejemplo, la longitud puede medirse en centímetros o pulgadas, y un principio fundamental de física es que el comportamiento de un sistema no depende de la elección arbitraria de las unidades de medición que se utilicen.

La ecuación o ecuaciones que simbolizan la situación física son relaciones entre los símbolos que representan a las variables adecuadas. Cada término en cualquiera de estas situaciones debe tener las mismas dimensiones y la ecuación es consecuente matemáticamente con la situación física. El conocimiento de esta propiedad simple y básica que tienen las ecuaciones para describir las situaciones físicas, proporciona los medios para comprobar las formulaciones iniciales, y cualquier manipulación algebraica subsecuente. Aunque puede parecer demasiado elemental, como para poseer importancia práctica al comprobar la consistencia dimensional, a menudo se descubren errores en la formulación y en la manipulación.

Los ingenieros experimentados realizan esta comprobación. Además, si se reconoce que la consistencia dimensional siempre debe de existir y aun cuando, de hecho, no es posible deducir las ecuaciones para una situación en particular, a menudo es posible emplear un proceso denominado análisis dimensional para obtener un indicio sobre la forma de una relación básica.

El objetivo de esta sección es explorar con mayor detalle estas ideas de consistencia y análisis dimensional. Es necesario primero revisar los sistemas de unidades empleados comúnmente en problemas científicos y de ingeniería.

3.5.1 Sistemas de unidades

En los países de habla inglesa se utilizan comúnmente cinco sistemas de unidades: dos "métricos" y tres "ingleses", y es necesario familiarizarse con todos. Las cantidades que generalmente se miden son: longitud (L), tiempo (θ), masa (M), fuerza (F), y temperatura (T). La unidad fundamental de tiempo siempre es el segundo pero las unidades de una o más de las otras cantidades varían de sistema a sistema. Para el desarrollo siguiente será necesaria una relación básica entre la fuerza y la masa; dicha relación está enunciada por *el principio de la aceleración de Newton* (*segunda ley de Newton*), el que dice que la fuerza requerida para acelerar de manera uniforme una masa definida es igual al producto de la masa por la aceleración:

$$f = ma \tag{3.3}$$

Las dimensiones de la aceleración son longitud por tiempo por tiempo o en forma simbólica:

$$a[=]L\theta^{-2} \tag{3.4}$$

El símbolo [=] significa "tiene dimensiones de". De esta manera, las dimensiones de fuerza se definen en terminos de M, L y θ:

$$F[=]ML\theta^{-2} \tag{3.5}$$

El sistema cgs, es el sistema de unidades más utilizado en trabajos científicos y, por tanto, probablemente el más generalizado en este aspecto para los cursos básicos de física y química. Este es el sistema *centímetro-gramo-segundo*. La longitud se mide en centímetros (cm), la masa en gramos (g), el tiempo en segundos (seg), y la temperatura en grados centígrados (°C). A partir de la ecuación 3.5,:

$$\text{fuerza } [=] \text{ gcmseg}^{-2}$$

La unidad de fuerza se denomina dina (d), que se define:

$$1 \text{ d} = 1 \text{ gcmseg }^{2}$$

Aquí hay un aspecto importante, pero inadvertido. Se han introducido las unidades de centímetro, gramo, segundo y dina, *cuatro* unidades de las cuales solamente *tres* son independientes. Si se desea medir la fuerza en dinas, la masa en gramos, la longitud en centímetros, y el tiempo en segundos, entonces la ecuación 3.3 no tiene unidades consistentes, por tanto, se necesita volverla a escribir para incluir el factor de conversión comúnmente denominado g_c:

$$\begin{array}{cccc} g_c & f = & m & a \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \left[1\,\dfrac{\text{gcm}}{\text{dseg}^2}\right] & [\text{d}] & [\text{g}] & \left[\dfrac{\text{cm}}{\text{seg}^2}\right] \end{array} \qquad (3.6$$

Frecuentemente se omite el factor de conversión en el sistema cgs debido a que su valor numérico es la unidad. No es lo mismo para todos los sistemas, pero no obstante es aconsejable *incluir el factor g_c siempre que aparezcan fuerza y masa.* Finalmente recuerde que el peso de un objeto, w, es la fuerza causada por la aceleración debida a la gravedad:

$$g_c w = mg \tag{3.7}$$

La aceleración debida a la gravedad es aproximadamente 980 cm/seg^2, de tal manera, que el peso de un gramo masa equivale a 980 d. Frecuentemente el lego confunde la masa y el peso. En cambio la masa de un objeto es la misma en cualquier parte del universo, el peso depende de la aceleración gravitacional, y varía ligeramente de un lugar a otro. En la tabla 3.1 se resume el sistema cgs.

TABLA 3.1 Unidades del sistema cgs (centímetro-gramo-segundo)

Longitud	[=]	centímetro, cm
Masa	[=]	gramo, g
Tiempo	[=]	segundo, seg
Fuerza	[=]	dina, d
Temperatura	[=]	grados centígrados, °C
g_c	=	1 gmcm/dseg^2

Un sistema muy vinculado al anterior es el sistema S.I., o sea el *Sistema Internacional* (Systeme International d'Unités), en el que las unidades de longitud, masa, tiempo y temperatura son respectivamente: metro (m), kilogramo (kg), segundo y grado centígrado. La unidad de fuerza se denomina Newton (n), que es numéricamente igual a un kilogramo metro por segundo por segundo, de tal manera, que el valor numérico g_c, es la unidad. El sistema se resume en la tabla 3.2. El sistema S.I. ha sido adoptado por gran cantidad de países y es el sistema de unidades requerido por la publicación del Instituto Americano de Ingenieros Químicos. No obstante, el uso en ingeniería aún no es común.

TABLA 3.2 Unidades del S.I. (Sistema Internacional)

Longitud	[=]	metro, m; 1 m = 100 cm
Masa	[=]	kilogramo, kg; 1 kg = 1000 g
Tiempo	[=]	segundo, seg
Fuerza	[=]	Newton, n; 1 n = 10^{5}d
Temperatura	[=]	grados centígrados, °C
g_c	=	1 kgm/nseg^2

El sistema básico inglés es el fps, o sea el sistema *pie-libra-segundo.* Las unidades de longitud, masa, tiempo y temperatura son respectivamente: pie (ft), libra masa (lb_m), segundo y grado Fahrenheit (°F). En el sistema fps la unidad de fuerza se define de tal manera que se mantiene g_c numéricamente igual a la unidad. Esta unidad de fuerza el poundal (lbl), se define como:

$$1 \text{ lbl} = 1 \text{ lb}_m \text{ftseg}^{-2}$$

El sistema se resume en la tabla 3.3. El sistema fps es un sistema lógico pero se usa muy poco debido a la desafortunada confusión entre la masa y el peso. Aunque es incorrecto, se acostumbra considerar iguales a la masa y la fuerza, particularmente a la fuerza expresada como peso en libras. El

TABLA 3.3 Unidades del sistema fps (pie-libra-segundo)

Longitud	[=] pie, ft; 1 ft = 30.48 cm
Masa	[=] libra-masa; 1 lb_m = 453.59 g
Tiempo	[=] segundos, seg
Fuerza	[=] poundal, lbl; 1 lbl = 13,826 d
Temperatura	[=] grados Fahrenheit, °F; 1°F = 5/9°C
g_c	= 1 lb_mpie/1blseg^2

sistema de ingeniería se ha desarrollado en un intento para evitar esta confusión. Es el sistema más común en el mundo de habla inglesa y es el que se usará en este libro.

TABLA 3.4 Unidades del sistema de ingeniería:

Longitud	[=] pie. ft; 1 ft = 30.48 cm
Masa	[=] libra-masa, lb_m; 1 lb_m = 453.59 g
Tiempo	[=] segundo, seg
Fuerza	[=] libra-fuerza, lb_f; 1 lb_f = 4.45 × 10^5 d
Temperatura	[=] grados Fahrenheit, °F; 1°F = 5/9°C
g_c	= 32.174 lb_m pie/lb_f seg^2

En el sistema de ingeniería, resumido en la tabla 3.4, las unidades de longitud, masa, tiempo y temperatura siguen siendo: pie, libra-masa, segundo y grado Fahrenheit. No obstante se define una nueva unidad de fuerza, la *libra fuerza* (lb_f), basándose en

$$1\ lb_f = 32.174\ lbl$$

o en la ecuación 3.6

$$1\ lb_f = 32.174\ lb_m\ ft/seg^2$$
$$g_c = 32.174\ lb_m\ ft/lb_f seg^2$$

El elegir 32.174 no es, por supuesto, arbitrario. La aceleración debida a la gravedad en las unidades inglesas, es de 32.174 ft/seg^2 al nivel del mar y a una latitud de 45°, de tal manera que cuando se expresa el *peso* a partir de la ecuación 3.7 como:

$$w = \frac{g}{g_c} m$$

se encuentra que el peso de una libra-masa es numéricamente igual a una libra-fuerza. Esta concordancia con el uso común se obtiene por un factor de conversión que no es la unidad. Además, es importante hacer notar que el sistema de ingeniería es un sistema ligado a la tierra. g_c es un número fijo, en tanto que g varía ligeramente de punto a punto de la Tierra, pero para lograr una exactitud suficiente la relación numérica g/g_c siempre es igual a la unidad. Sin embargo, en un campo muy diferente del gravitacional, la relación g/g_c difiere bastante de la unidad, y la única ventaja del sistema de ingeniería, es decir, la igualdad numérica de la masa y el peso, se pierde.

El *sistema gravitacional* es otro sistema inglés que se utiliza ocasionalmente. Las unidades de longitud, masa, tiempo, fuerza y temperatura son, respectivamente, pie, slug, segundo, libra-fuerza y grado Fahrenheit. El slug se define como:

$$1 \text{ slug} = 32.174 \text{ lb}_m$$

$$g_c = 1 \text{ slugft/lb}_f\text{seg}^2$$

El sistema gravitacional se resume en la tabla 3.5. Hay otros dos sistemas métricos que utilizan el gramo-fuerza y el kilogramo-fuerza, pero no se emplean en los países de habla inglesa.

TABLA 3.5 Unidades del sistema gravitacional

Longitud	[=] pie, ft; 1 ft = 30.48 cm
Masa	[=] slug; 1 slug = 14,592 g
Tiempo	[=] segundos, seg.
Fuerza	[=] libra fuerza, lb_f; 1 lb_f = 4.45 × 10^5 d
Temperatura	[=] grados Fahrenheit, °F; 1°F = 5/9°C
g_c	= 1 slugpie/lb_f seg^2.

He aquí otras consideraciones acerca de la temperatura: Los puntos cero en las escalas centígrada y Fahrenheit son completamente arbitrarios (0°C =punto de congelación del agua, 0°F=punto de congelación del agua — 32 grados) y el factor de conversión 1°F=5/9°C se refiere solamente a *diferencias* de temperatura. Escalas más naturales, aunque menos comunes, son las escalas absolutas Rankine (°R) y Kelvin (°K), donde el cero corresponde al punto en que cesa el movimiento molecular de un gas ideal. Las relaciones son:

$$T(°\text{R}) = T(°\text{F}) + 459.58$$

$$T(°\text{K}) = T(°\text{C}) + 273.15$$

Es necesario distinguir entre escala común y absoluta. *La mayor parte de las relaciones fundamentales en física y química requieren temperaturas absolutas.*

En los capítulos posteriores se tratará en detalle la energía. Sin embargo, es útil aprovechar aquí la experiencia previa de la física elemental que muestra que la energía y el trabajo, corresponden a fuerza multiplicada por distancia. Las unidades naturales de la energía son entonces las que aparecen en la tabla 3.6

TABLA 3.6 Unidades de energía:

cgs:	1 dina cm $\equiv$ 1 erg
S.I.:	1 Newton m $\equiv$ 1 joule; 1 joule $= 10^7$ erg
ingeniería:	1 pie lb_f; 1 $ftlb_f = 1.356 \times 10^7$ erg

La conversión entre sistemas de unidades es una operación sin importancia como lo indican los siguientes ejemplos. Sin embargo, frecuentemente es necesario puesto que varios datos del laboratorio para un problema dado pueden haber sido registrados en un sistema diferente.

Ejemplo 3.1

La densidad ρ, se mide frecuentemente en el laboratorio en gramos por centímetro cúbico. Si la densidad de una muestra de agua es 1.00 g/cm³, ¿Cuál será la densidad en libras-masa por pie cúbico?

$$\rho = \left[1.00 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right]\left[\frac{1\ \text{lb}_\text{m}}{453.6\ \text{g}}\right]\left[\frac{(2.54)^3\ \text{cm}^3}{1\ \text{in}^3}\right]\left[\frac{12^3\ \text{in}^3}{1\ \text{ft}^3}\right] = 62.4\ \text{lb}_\text{m}/\text{ft}^3$$

Ejemplo 3.2

La viscosidad, μ, es una medida de la resistencia que opone un fluido al movimiento; comúnmente se mide en poises (p) donde:

$$1\ \text{p} = 1\ \text{g/cmseg}$$

La viscosidad del agua es aproximadamente 10^{-2} p a la temperatura ambiente. Expresado en unidades de ingeniería:

$$\mu = \left[10^{-2} \frac{\text{g}}{\text{cmseg}}\right]\left[\frac{1\ \text{lb}_\text{m}}{453.6\ \text{g}}\right]\left[\frac{1\ \text{cm}}{0.0328\ \text{ft}}\right] = 6.72 \times 10^{-4} \frac{\text{lb}_\text{m}}{\text{ftseg}}$$

Ejemplo 3.3

Cuando un fluido se mueve en un tubo, la relación:

$$\text{N}_{\text{Re}} = \frac{Dv\rho}{\mu}$$

es a menudo necesaria; donde D es diámetro del tubo, v velocidad del fluido ρ y μ densidad y viscosidad respectivamente; y N_{Re} el *Número de Reynolds*; llamado así en honor del científico inglés del siglo XIX, Osborne Reynolds. ¿Cuáles son las dimensiones de N_{Re}?

$$D[=]L, \qquad v[=]L\theta^{-1}, \qquad \rho[=]ML^{-3}, \qquad \mu[=]ML^{-1}\theta^{-1}$$

Por consiguiente:

$$N_{Re}[=]\,\frac{[L][L\theta^{-1}][ML^{-3}]}{ML^{-1}\theta^{-1}} = 1$$

Es decir, N_{Re} es *adimensional*, y, mientras se midan todas las cantidades en el mismo sistema de unidades, el valor numérico será independiente del sistema particular empleado. Para subrayar este hecho considere agua en una tubería con $D = 1$ in., $v = 10$ ft/seg, $\rho = 62.4$ lb$_m$/ft^3, y $\mu = 6.72 \times 10^{-4}$ lb$_m$/ftseg. Entonces:

$$N_{Re} = \frac{[1\text{ in}][1\text{ ft}/12\text{ in}][10\text{ ft/seg}][62.4\text{ lb}_m/\text{ft}^3]}{6.72 \times 10^{-4}\text{ lb}_m/\text{ftseg}} = 7.74 \times 10^4$$

En unidades cgs se obtiene $D = 2.54$ cm, $v = 304.8$ cm/seg, $\rho = 1$ g/cm^3 $\mu = 10^{-2}$ g/cm seg.

$$N_{Re} = \frac{[2.54\text{ cm}][304.8\text{ cm/seg}][1\text{ g/cm}^3]}{10^{-2}\text{ g/cmseg}} = 7.74 \times 10^4$$

3.5.2 Consistencia dimensional en las descripciones matemáticas

Al describir una situación física cada símbolo empleado en las ecuaciones tiene una parte inseparable de su significado asociada con sus dimensiones. Cada vez que se formula un problema utilizando una de las leyes de la conservación, las ecuaciones deben verificarse para comprobar que cada uno de los términos tiene las dimensiones de masa, energía, o momento, dadas por la ley de la conservación empleada. Esta verificación casi sin importancia puede ser valiosa para que el estudiante se acostumbre a formular modelos, y *siempre* debe hacerse después de deducir cualquier ecuación. Como ejemplo, haga referencia nuevamente al problema del vaciado de un tanque del capítulo 2.

Después de emplear la ley de la conservación de la masa se tiene la siguiente relación, ecuación 2.1:

$$\frac{d}{dt}[\rho A h] = -\rho q \qquad (2.1)$$

En el capítulo 2 se definieron los símbolos en términos de sus unidades en el sistema de ingeniería a excepción de d, que es un operador como $+$ ó $-$ y no tiene dimensiones físicas. Hay dos términos en la ecuación, y cada uno debe tener unidades que representen masa/tiempo, por ejemplo, lb_m/seg. Para verificar que las unidades son apropiadas, se escribe cada término tal como aparece en la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \quad \rho \quad A \quad h = -\rho \; q$$

$$\frac{1}{seg} \; \frac{lb_m}{ft^3} \; ft^2 \; ft \qquad \frac{lb_m}{ft^3} \; \frac{ft^3}{seg}$$

Puesto que las unidades ft/ft se cancelan, se obtiene:

$$\frac{lb_m}{seg} = \frac{lb_m}{seg}$$

También puede emplearse el concepto de propiedad para verificar cualquiera de las manipulaciones algebraicas de una ecuación. Las operaciones algebraicas de los símbolos que aparecen en la ecuación, pueden ser bastante complejas. Con las unidades asociadas a cada símbolo se efectúan las mismas operaciones algebraicas, y puede hacerse una verificación parcial del procedimiento algebraico rectificando la consistencia dimensional. Un ejemplo sencillo sería, dividir la ecuación 2.1 entre ρA se obtiene la ecuación 2.2:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{q}{A} \tag{2.2}$$

$$\frac{ft}{seg} = \frac{ft^3/seg}{ft^2} = \frac{ft}{seg}$$

La ecuación es al menos dimensionalmente consistente.

Un ejemplo más complejo para verificar la consistencia es la ecuación 3.8 que se da a continuación, ésta se deducirá en el capítulo 5 para describir un sistema líquido que reacciona químicamente en un tanque cuyo flujo es continuo:

$$\frac{d}{dt}[Vc_A] = q_f c_{Af} - qc_A - Vkc_A \tag{3.8}$$

V	volumen del líquido, ft^3
q_f, q	velocidades de flujo de entrada y salida, respectivamente, ft^3/min
c_{Af}, c_A	concentración de la sustancia A en las corrientes de entrada y salida del tanque, respectivamente, lb_m/ft^3
k	parámetro en una relación básica, la *constante específica de velocidad de reacción*, 1/min.

Reemplazando los símbolos con sus unidades se ve que cada término tiene unidades lb_m/min.

$$\frac{d}{dt} \quad V \quad c_A = q_f \quad c_{Af} - \quad q \quad c_A - V \quad k \quad c_A$$

$$\frac{1}{min} \quad ft^3 \frac{lb_m}{ft^3} \quad \frac{ft^3}{min} \frac{lb_m}{ft^3} \quad \frac{ft^3}{min} \frac{lb_m}{ft^3} \quad ft^3 \frac{1}{min} \frac{lb_m}{ft^3}$$

$$\frac{lb_m}{min} \qquad \frac{lb_m}{min} \qquad \frac{lb_m}{min} \qquad \frac{lb_m}{min}$$

Esta verificación de la propiedad en distintas relaciones debe convertirse en un hábito para alcanzar la eficiencia necesaria para el desarrollo de modelos. Estos son fáciles de efectuar, pero cualquier persona que lea críticamente el material científico y de ingeniería, puede encontrar frecuentemente errores en cuanto a las dimensiones de las ecuaciones, un comentario sobre una lección que no se aprendió adecuadamente.

Siempre puede encontrarse un grupo de variables tal, que cada término en cualquier ecuación sea adimensional. Por ejemplo, las ecuaciones 2.2 y 3.8 pueden escribirse así:

$$\frac{A}{q} \quad \frac{dh}{dt} = -1$$

$$\frac{ft^2}{ft^3/min} \frac{ft}{min} = 1, \quad \text{adimensional}$$

$$\frac{1}{q_f c_{Af}} \quad \frac{d}{dt} \cdot [V c_A] = 1 - \frac{q}{q_f} \quad \frac{c_A}{c_{Af}} - \frac{Vk}{q_f} \quad \frac{c_A}{c_{Af}} \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{\frac{ft^3}{min} \frac{lb_m}{ft_3}} \frac{1}{min} \quad ft^3 \frac{lb_m}{ft^3} \qquad 1 \qquad \frac{\frac{ft^3}{min} \frac{lb_m}{ft^3}}{\frac{ft^3}{min} \frac{lb_m}{ft^3}} \quad \frac{ft^3 \frac{1}{min} \frac{lb_m}{ft^3}}{\frac{ft^3}{min} \quad \frac{lb_m}{ft^3}}$$

A primera vista esta posibilidad no proporciona ninguna ventaja sobre las fórmulas originales; observe las fórmulas más a fondo y compruebe que son más adecuadas. Aplique el sistema de reacciones a la ecuación 3.9. En ciertas condiciones, que se estudiarán en capítulos posteriores se encuentra que:

$$q_f = q = \text{constante}$$

$$c_{Af} = \text{constante}$$

Consecuencia directa de la primera limitación es que el volumen del líquido V, sea constante. Valiéndose del hecho de que las constantes pueden salir o entrar del operador de diferenciación, *d/dt*, la ecuación 3.9 se vuelve a escribir de la siguiente manera:

$$\frac{V}{q}\frac{d}{dt}\frac{c_A}{c_{Af}} = 1 - \frac{c_A}{c_{Af}} - \frac{V}{q}k\frac{c_A}{c_{Af}}$$

La relación c_A/c_{Af} es adimensional, y es conveniente asignarle un nombre,

$$\frac{c_A}{c_{Af}} \equiv x_A$$

Más aún , V/q tiene las dimensiones del tiempo. Se llamará el *tiempo de residencia*, y se le asignará un símbolo:

$$\frac{V}{q} \equiv \theta$$

Por lo tanto, se tiene la ecuación:

$$\theta\frac{dx_A}{dt} = 1 - x_A - [k\theta]x_A$$

Note que la relación t/θ es adimensional. Sea:

$$\tau \equiv \frac{t}{\theta}$$

Entonces:

$$dt = \theta\, d\tau$$

y se obtiene, finalmente:

$$\frac{dx_A}{d\tau} = 1 - x_A - [k\theta]x_A \qquad (3.10)$$

La ecuación 3.10 relaciona tres grupos adimensionales de variables, x_A, $k\theta$, y τ. Puesto que incluye una derivada, es necesario también el valor de x_A en el tiempo cero, x_{A0}. Por consiguiente, la solución da x en función de tres variables, las dos constantes, x_{A0} y $k\theta$, y el tiempo reducido, τ. A diferencia de la solución de la ecuación original (3.8), es donde c_A es función de *cinco* constantes, q, V, k, c_{Af}, y c_{A0} (el valor inicial de c_A), y tiempo, t. La representación adimensional indica que el comportamiento del tiempo depende solamente de ciertos agrupamientos de constantes. Por tanto, la complejidad se reduce considerablemente, es más sencillo escribir la ecuación así como trabajar con ella, y existen menos posibilidades de error en el procedimiento. Si se tienen tres constantes en la ecuación adimensional, y se desea estudiar el comportamiento, por ejemplo para diez valores de cada una, entonces deben estudiarse $10 \times 10 \times 10 = 1000$ casos. Para estudiar diez valores de cada una de las cinco constantes en la formulación original se requeriría estudiar $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$ 100,000 casos.

3.5.3 Análisis dimensional y relaciones básicas

Se busca una relación básica cuando para desarrollar un modelo no es posible obtener mayor información, a partir de una aplicación razonable de las leyes de la conservación. Se requieren una o más ecuaciones que relacionen dos o más de las variables dependientes, y a menudo, se obtienen realizando experimentos o utilizando la información experimental de otros. En ingeniería, en muchos casos la situación física puede ser tan compleja que no es fácil trazar un programa experimental adecuado o interpretar los resultados, sin una gran cantidad de manipulaciones tentativas o utilizando hipótesis. En el caso expuesto en el capítulo 2 los experimentos fueron fáciles de planear, pero al buscar una relación funcional entre q y h, se hizo por combinación de hipótesis y pruebas sucesivas de modelos más complejos, después de aplicar los menos complejos para justificar adecuadamente los datos.

En las situaciones donde es necesario establecer una relación básica no es conveniente deducir una o más ecuaciones. Aun cuando no se conoce la forma funcional de una ecuación, se reconoce que debe existir la consistencia dimensional; o sea, cada término en la ecuación debe tener las mismas unidades que los demás y *es posible reordenar las variables de manera que cada término en la ecuación sea adimensional.* Este simple hecho puede utilizarse para obtener mayor información sobre la estructura de ecuaciones básicas al realizar un estudio limitado de la forma de las ecuaciones.

Ciertas ecuaciones básicas que se utilizan en este texto son algebraicas (por ejemplo, $q = kh^{1/2}$, $pV = nRT$, etc.). Si determinado caso requiere el uso de dos variables, x y y, con sus dimensiones correspondientes, siempre puede expresarse la relación entre x y y, en la siguiente forma:

$$\alpha x^a y^b = \beta x^c y^d + \gamma x^e y^f + \delta x^g y^h + \cdots \tag{3.11}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, a, b, c, d, \ldots$ son números reales sin dimensiones. La tabla 3.7 muestra ejemplos de cómo escribir varias ecuaciones en la forma de la ecuación 3.11. Como se demostró anteriormente, siempre es posible que los términos $x^a y^b$, $x^c y^d$, etc., de la ecuación 3.11, se hagan adimensionales por multiplicación y división. Igualmente, una ecuación algebraica con tres variables x, y, y z puede ponerse en forma adimensional:

$$\alpha x^a y^b z^c = \beta x^d y^e z^f + \gamma x^g y^h z^i + \cdots$$

TABLA 3.7 Varias ecuaciones en la forma de la ecuación 3.11

Ecuación	Forma de Ecuación 3.11
$x = 5y^2$	$x = 5y^2$
$x = 5e^y$	$x = 5 + 5y + \frac{5}{2}y^2 + \frac{5}{6}y^3 + \cdots$
$3e^{2x} = \text{sen } y$	$3 + 6x + 6x^2 + \cdots = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 - \cdots$
$2xy^2 = e^{2x}\text{sen } y$	$2xy^2 = [1 + 2x + 2x^2 + \cdots]$ $\times [y - \frac{1}{6}y^3 + \cdots]$ $= y + 2xy + 2x^2y - \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{3}xy^3$ $- \frac{1}{3}x^2y^3 + \cdots$

y para n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\alpha x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \cdots x_n^{a_n} = \beta x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \cdots x_n^{b_n} + \gamma x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3} \cdots x_n^{c_n} + \cdots$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ son números. Para introducir el análisis dimensional solamente se tratarán relaciones algebraicas entre las variables dependientes. Como se verá posteriormente, pocas son las ocasiones en que una relación constitutiva no pueda expresarse como ecuación algebraica, de manera que el proceso que se desarrollará es de aplicación general. Para ilustrar, suponga que las variables dependientes del problema son x, y, y z. La ecuación *adimensional* que las relacione siempre puede ordenarse en la siguiente forma:

$$\alpha x^a y^b z^c = \beta x^d y^e z^f + \gamma x^g y^h z^i + \delta x^j y^k z^l + \cdots \tag{3.12}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, a, b, c, d, \ldots$ son números sin dimensiones. Siendo ahora la dimensión del problema L (longitud) y θ (tiempo), suponga que x es una área (L^2), y un tiempo (θ), y z una aceleración ($L\theta^{-2}$). Entonces las dimensiones de término de la izquierda pueden escribirse como:

$$\begin{bmatrix}\text{dimensiones}\\ \text{de}\\ x\end{bmatrix}^a \begin{bmatrix}\text{dimensiones}\\ \text{de}\\ y\end{bmatrix}^b \begin{bmatrix}\text{dimensiones}\\ \text{de}\\ z\end{bmatrix}^c$$

$$[L^2]^a[\theta]^b[L\theta^{-2}]^c$$

o, combinando los términos mediante procedimientos algebraicos sencillos se tiene:

$$\begin{matrix}\text{dimensiones del} \\ \text{miembro izquierdo.}\end{matrix} = L^{2a+c}\theta^{b-2c}$$

Puesto que cada término es adimensional, los exponentes de L y θ deben ser igual a cero. Por consiguiente, se tiene:

$$\begin{aligned} 2a + c &= 0 \\ b - 2c &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por supuesto, las ecuaciones 3.13 son sólo dos ecuaciones algebraicas homogéneas lineales, con tres incógnitas, a, b, y c, y es posible resolverlas despejando dos en función de la tercera. Por ejemplo, despejando en función de c, se tiene:

$$b = 2c$$

$$a = -\tfrac{1}{2}c$$

de manera que el primer término del miembro izquierdo de la ecuación 3.12 es:

$$\begin{aligned} \alpha x^{-c/2} y^{2c} z^{c} &= \alpha\left[\frac{y^2 z}{x^{1/2}}\right]^{c} \\ &= \alpha\left[\frac{y^4 z^2}{x}\right]^{c/2} \end{aligned}$$

En forma similar, el término $\beta x^d y^e z^f$ en la ecuación 3.12 tiene las siguientes dimensiones:

$$\left[\begin{matrix} L^2 \\ \text{dimensiones} \\ \text{de } x\end{matrix}\right]^{d}\left[\begin{matrix} \theta \\ \text{dimensiones} \\ \text{de } y\end{matrix}\right]^{e}\left[\begin{matrix} L\theta^{-2} \\ \text{dimensiones} \\ \text{de } z\end{matrix}\right]^{f} = L^{2d+f}\theta^{e-2f}$$

de manera que, para que sean adimensionales, los exponentes de L y θ deben ser cero:

$$2d + f = 0$$

$$e - 2f = 0$$

Resolviendo la ecuación en función de e,

$$f = \tfrac{1}{2}e$$

$$d = -\tfrac{1}{4}e$$

Por tanto

$$\beta x^d y^e z^f = \beta x^{-e/4} y^e z^{e/2} = \beta\left[\frac{y z^{1/2}}{x^{1/4}}\right]^{e} = \beta\left[\frac{y^4 z^2}{x}\right]^{e/4}$$

Observe que aparece el mismo grupo de variables y^4z^2/x! por supuesto, cuando sucede a la inversa es obvio, y se aplicará a todos los otros términos. La ecuación 3.12 entonces debe tener la forma:

$$\alpha\left[\frac{y^4z^2}{x}\right]^{c/2} = \beta\left[\frac{y^4z^2}{x}\right]^{e/4} + \gamma\left[\frac{y^4z^2}{x}\right]^{i/2} + \delta\left[\frac{y^4z^2}{x}\right]^{-j} + \cdots$$

Es una ecuación en la cantidad adimensional y^4z^2/x, la que se denotará como N. Por consiguiente:

$$\alpha N^{c/2} = \beta N^{e/4} + \gamma N^{i/2} + \delta N^{-j} + \cdots \tag{3.14}$$

Ahora, si se conocieran los números $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, c, e, i, j, \ldots$ sería posible resolver esta ecuación algebraica con una incógnita, ya que la solución es un número real que podría llamarse N_0. Puesto que no se conocen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, c, e, i, j, \ldots$ es imposible escribir el valor de N_0, pero se sabe que existe este número, y no es posible determinarlo a partir de la ecuación 3.14, deberá hacerse experimentalmente; por consiguiente:

$$\frac{y^4z^2}{x} = N_0$$

La relación que existe entre las variables x, y, y z en el problema físico *debe* ser de la forma:

$$N_0x = y^4z^2$$

y el resto de las variables para completar la ecuación básica es la determinación experimental del número N_0.

En cualquier problema se especifican las variables convenientes y sus dimensiones. Sea el número $\mathscr{V}$ de variables y el número de dimensiones $\mathscr{D}$. La diferencia $G = \mathscr{V} - \mathscr{D}$, es una cantidad importante en el análisis dimensional. En el ejemplo anterior y en los que siguen, $G = 1$, caso particularmente sencillo, en el que siempre es necesario determinar un número experimentalmente. Con frecuencia, G es mayor que la unidad, en cuyo caso debe determinarse una función completa mediante una serie de experimentos efectuados en la forma **especificadas** por el análisis dimensional. Más adelante se probarán estas observaciones, y se hablará sobre el caso $G > 1$.

Ejemplo 3.4 Ecuación de un orificio

Puede examinarse nuevamente el problema del vaciado de un tanque como ejemplo específico y práctico, del uso del análisis dimensional al desarrollar una ecuación básica. Recuerde que es necesario establecer una relación básica entre las variables características dependientes q y h. La velocidad de flujo volumétrico, q, se relaciona con Δp, la disminución de presión de un lado a otro del orificio. [En el capítulo 2 se consideró q como una función de la altura h, simplificación que solamente es válida si el tanque está abierto a la atmósfera. Por razones que se darán a continuación, es conveniente considerar la situación general de $q = q(\Delta p)$ como se estudió inicialmente, al plantear el problema.] Se supone que la densidad del líquido, ρ, es importante, y que debe considerarse el área del orificio de salida, A_0. Las variables con sus dimensiones respectivas son entonces:

$$q\ [=]\ L^3\theta^{-1}$$

$$\Delta p\ [=]\ FL^{-2}$$

$$\rho\ [=]\ ML^{-3}$$

$$A_0\ [=]\ L^2$$

donde L, M, F, y θ denotan respectivamente, longitud, masa, fuerza, y tiempo. Siempre que se usa un sistema de ingeniería con fuerza y masa, debe incluirse g_c:

$$g_c\ [=]\ MF^{-1}L\theta^{-2}$$

Entonces se tendrán cinco variables que se relacionan entre sí $\mathscr{V} = 5$, y cuatro dimensiones $\mathscr{D} = 4$. Entonces $G = \mathscr{V} - \mathscr{D} = 1$.

Cuando se escribe la ecuación constitutiva en forma adimensional cada término debe tener la forma:

$$q^a\ \Delta p^b \rho^c A_0{}^d g_c{}^e$$

con las siguientes dimensiones:

$$[L^3\theta^{-1}]^a[FL^{-2}]^b[ML^{-3}]^c[L^2]^d[MF^{-1}L\theta^{-2}]^e$$
$$= L^{3a-2b-3c+2d+e}M^{c+e}F^{b-e}\theta^{-a-2e}$$

Puesto que el término es adimensional, el exponente de cada dimensión debe ser cero. Por consiguiente:

$$3a - 2b - 3c + 2d + e = 0$$
$$c + e = 0$$
$$b - e = 0$$
$$-a - 2e = 0$$

Las cuatro ecuaciones con cinco incógnitas pueden resolverse para cualquier incógnita. Suponga que se resuelve para a. Entonces:

$$b = e = -c = -a/2$$
$$d = -a$$

Cada término de la ecuación tiene entonces la forma:

$$q^a \Delta p^{-a/2} \rho^{a/2} A_0^{-a} g_c^{-a/2} = \left\{ \frac{q}{A_0} \left[\frac{\rho}{g_c \Delta p} \right]^{1/2} \right\}^a$$

La ecuación básica es en este caso, una ecuación en términos de un solo grupo adimensional de las variables $[q/A_0][\rho/g_c \; \Delta p]^{1/2}$. En principio, la ecuación puede resolverse para obtener un valor del grupo. Este valor se denominará C, en cuyo caso se obtiene:

$$\frac{q}{A_0} \left[\frac{\rho}{g_c \Delta p} \right]^{1/2} = C$$

$$q = C A_0 \left[\frac{g_c \Delta p}{\rho} \right]^{1/2}$$

No se conoce el valor de la constante C, pero se puede rectificar la forma de la relación para la situación experimental estudiada en el capítulo 2. En el tanque abierto, la presión en el fondo equivale a la presión atmosférica, más la presión adicional resultante del peso de la columna del líquido $\rho gh/g_c$, mientras que la presión exterior es la atmosférica. Por consiguiente:

$$\Delta p = \frac{\rho g h}{g_c}$$

y , en el experimento,

$$q = [C A_0 g^{1/2}] h^{1/2}$$

En el capítulo 2 se demostró que la concordancia de la relación $q = kh^{1/2}$ entre las predicciones del modelo y los datos, era bastante buena. De los datos del capítulo 2 se obtiene entonces el valor $C = 0.91$. *Observe que este resultado se aplica a todos los orificios, en tanto que los experimentos del capítulo 2, solamente se aplicaron a un tanque y orificio particulares.* Por consiguiente, del análisis dimensional y de un experimento se obtiene el siguiente resultado: la velocidad de flujo a través de un orificio causada por la diferencia de presión será:

$$q = 0.91 A_0 \left[\frac{g_c \Delta p}{\rho} \right]^{1/2}$$

En la práctica, por razones que se apreciarán en el capítulo 10 mediante la aplicación del principio de la conservación de la energía, el resultado general es de la forma:

$$q = C_0 A_0 \left[\frac{2g_c \Delta p}{\rho} \right]^{1/2}$$

donde C_0, el *coeficiente de orificio*, es un número casi siempre cercano al 0.6. En el experimento registrado aquí, se encontró que $C_0 = 0.65$.

Al tiempo que se indica que el análisis dimensional predice la relación de raíz cuadrada, es necesario advertir que: *solamente aquellas variables que se incluyan pueden aparecer en el resultado.* Por consiguiente, si no se hubiera incluido A_0 como una de las variables que pueden influir en q y se hubiera considerado h en su lugar, la ecuación constitutiva derivada sería:

$$q = Cg^{1/2}h^{5/2}$$

que es dimensionalmente consistente, pero no concuerda con el experimento. Es esencial efectuar una comprobación experimental cuidadosa al buscar una relación básica ya que el análisis dimensional sólo puede servir como guía del razonamiento.

Ejemplo 3.5 El gas ideal

Como los ingenieros químicos tratan frecuentemente con procesos donde algunos de los componentes son gases, se ilustrará otro desarrollo de una ecuación básica a partir del análisis dimensional. Trabajando con el problema de un gas simple que ya se debe conocer por los cursos básicos de física y química. Debe conocerse también la relación entre la presión del gas con las otras características variables.

Un modelo sencillo de un gas, es aquel en que se representa a las moléculas, como esferas rígidas que se mueven al azar, con una velocidad media u. La presión, p, depende de u; el número de moles, n; el peso molecular, M_w; y el volumen de la cámara, V. Las variables y las dimensiones son:

$$p \, [=] \, FL^{-2}$$

$$u \, [=] \, L\theta^{-1}$$

$$n \, [=] \, \mu \text{ (moles)}$$

$$M_w \, [=] \, M \, \mu^{-1}$$

$$V \, [=] \, L^3$$

$$g_c\ [=]\ MF^{-1}L\theta^{-2}$$

g_c es necesario ya que tanto la fuerza como la masa son utilizadas como dimensiones. Se tienen seis variables y cinco dimensiones, de tal manera que $G = 1$; aquí se puede anticipar que habrá un solo grupo adimensional que relaciona las variables mediante un parámetro experimental.

Cada término de la ecuación básica adimensional puede escribirse como:

$$p^a u^b n^c M_w{}^d V^e g_c{}^f$$

y las dimensiones entonces serán:

$$[FL^{-2}]^a[L\theta^{-1}]^b[\mu]^c[M\ \mu^{-1}]^d[L^3]^e[MF^{-1}L\theta^{-2}]^f$$
$$= L^{-2a+b+3e+f}M^{d+f}\mu^{c-d}F^{a-f}\theta^{-b-2f}$$

Sea cero el exponente para cada dimensión a fin de obtener la igualdad adimensional:

$$-2a + b + 3e + f = 0$$
$$d + f = 0$$
$$c - d = 0$$
$$a - f = 0$$
$$-b - 2f = 0$$

y despejando en función de a:

$$e = f = -d = -c = a$$
$$b = -2a$$

De esta manera, cada término en la ecuación es de la forma:

$$p^a u^{-2a} n^{-a} M_w^{-a} V^a g_c{}^a = \left[\frac{g_c pV}{nM_w u^2}\right]^a$$

Se tiene una ecuación en la cantidad $g_c pV/nM_w u^2$ que tendrá un valor numérico, sólo si puede resolverse la ecuación. No obstante, ya que no se conoce la ecuación no se puede evaluar dicho número. Pero por ahora se puede expresar:

$$pV = Nn\frac{M_w u^2}{g_c}$$

donde N es constante que puede evaluarse experimentalmente.

Para pasar a otra etapa recuerde, que la energía cinética promedio del modelo de "bola de billar" de un gas, se mide directamente por la temperatura absoluta. La energía cinética por mol es

$$\text{EC} = \frac{1}{2g_c} M_w u^2 [=] \text{ftlb}_f/\text{mol}$$

De esta manera se puede expresar

$$\text{EC} = CT$$

Donde T se mide en grados Rankine. Las unidades apropiadas para la constante dimensional C que será $\text{ftlb}_f/\text{mol}°\text{R}$. Sustituyendo:

$$pV = (2NC)nT$$

o combinando las constantes, se llega a la *ecuación del gas ideal:*

$$pV = nRT$$

La *constante universal del gas* R, tiene un valor experimental:

$$R = 1545\ \text{ftlb}_f/\text{mol}\ °\text{R}$$

Por supuesto, el modelo molecular es acaso un modelo aproximado y los gases reales siguen la ecuación solamente dentro de un rango restringido donde las fuerzas intermoleculares, la vibración molecular, la no-esfericidad, etc., no son importantes. La figura 3.9 muestra datos experimentales para varios gases graficados como pV/nRT y p a diferentes temperaturas. El valor constante derivado aquí, es válido a bajas presiones y altas temperaturas, correspondientes a bajas densidades, donde es de esperarse que la idealización molecular se aplique mejor.

Usualmente, cuando interviene la temperatura en un análisis dimensional es posible simplificar. La velocidad de una partícula media se utiliza solamente para obtener una energía, de tal manera que pueda introducirse la temperatura. Esto se evita utilizando simplemente el producto RT como variable, que tiene unidades de energía por mol es decir, ft lb_f/ mol. Para el modelo del gas simple, se tendrán entonces, las variables p, n, V, y RT, cuyas dimensiones son $F\bar{\mu}$, y L; de aquí se deduce la ecuación del gas ideal.

Generalmente se encontrará que $G = \mathscr{V} - \mathscr{D}$ tiene un valor de dos o más. Al examinar el procedimiento que se ha seguido para que cada uno de los términos sea adimensional, se puede notar que siempre se tendrá $\mathscr{D}$ ecuaciones algebraicas, y $\mathscr{V}$ incógnitas. De esta manera, siempre se podrán obtener G diferentes soluciones para estas ecuaciones algebraicas, y, por tanto, se encontrarán en el caso general G diferentes grupos adimensionales de las variables del problema. Suponga por ejemplo, que $G = 2$, entonces se

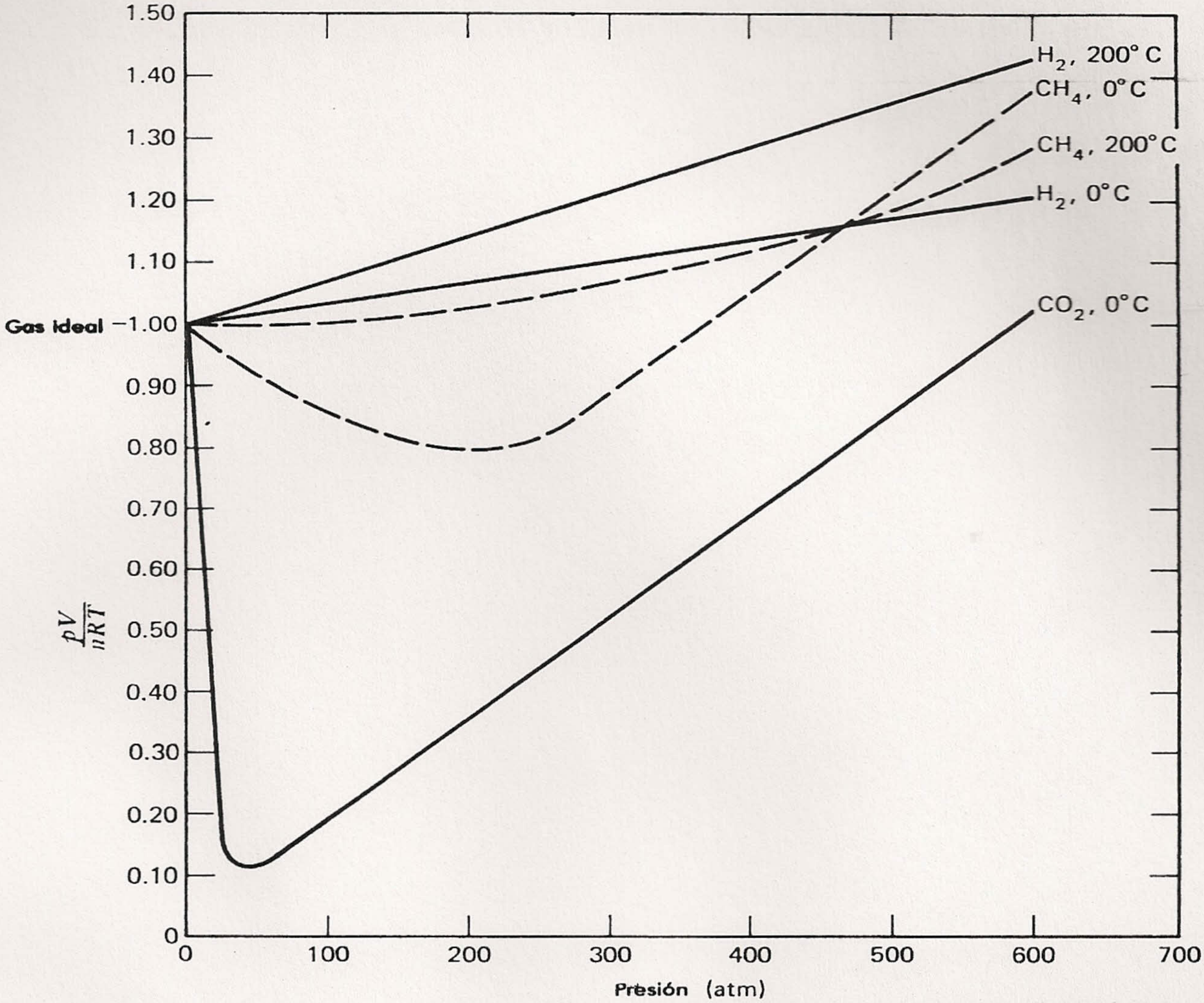

FIGURA 3.9 Desviación del comportamiento de un gas ideal, $pV/nRT=1$, para varios gases. Tomado de Himmelblau, *Basic Principles and Calculations in Chemical Engineering 2nd. Ed.*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967 'Reproducido con autorización.

tendrán dos grupos N_1 y N_2, y una ecuación adimensional que los relaciona entre sí. Entonces, en principio, se puede resolver para uno en términos del otro, con objeto de obtener la relación formal:

$$N_1 = f(N_2)$$

Ahora en lugar de un número será necesario encontrar una *función* mediante experimentos de tal manera que se requiera una serie de experimentos. Si $G=3$ se tendrá:

$$N_1 = f(N_2, N_3)$$

y así sucesivamente.

Antes de proceder con ejemplos posteriores es posible sistematizar el enfoque para un análisis dimensional:

1. **Identificar** y tabular todas las variables de interés, con sus dimensiones.
2. Determine el número de grupos adimensionales mediante el cálculo de:

$$G = \mathscr{V} - \mathscr{D}$$

El orden de las variables dentro de cada grupo adimensional se encontrará como sigue:

3. Escriba las variables como un producto de potencias, $x^a y^b z^c, \ldots$
4. Eleve las dimensiones de cada variable hasta la misma potencia de la variable en sí misma.
5. Desarrolle $\mathscr{D}$ ecuaciones, escribiendo una ecuación para cada dimensión de tal manera que la suma algebraica de los exponentes sea igual a cero.
6. Resuelva $\mathscr{D}$ ecuaciones lineales algebraicas para los exponentes respecto a los exponentes $\mathscr{V} - \mathscr{D}$ seleccionados arbitrariamente.
7. Cada exponente determina un grupo adimensional diferente, N_1, $N_2, \ldots$ Exprese la ecuación constitutiva en la forma:

$$N_1 = f(N_2, N_3, \ldots)$$

Si solamente existe un grupo $f =$constante. El procedimiento se aplica en los siguientes ejemplos en los que: $G > 1$.

Ejemplo 3.6 Ecuación de un orificio

Desde un punto de vista diferente considere nuevamente el problema del drenado de un tanque a través de un orificio. Se hace notar que el tanque está abierto a la atmósfera y se buscará directamente la dependencia de q sobre h. Se supone una dependencia de A_0 y ρ ya que el líquido sale del tanque solamente por la presencia de un campo gravitacional, también deberá considerarse la aceleración debida a la gravedad, g. Las variables y las dimensiones serán entonces:

$$q \; [=] \; L^3\theta^{-1}$$

$$h \; [=] \; L$$

$$A_0 \; [=] \; L^2$$

$$\rho \; [=] \; ML^{-3}$$

$$g \; [=] \; L\theta^{-2}$$

Solamente se utiliza la masa no la fuerza, por tanto no se requiere g_c. Aquí $\mathscr{V} = 5$, $\mathscr{D} = 3$, $G = 2$.

Cuando la ecuación básica se escribe en forma adimensional se tiene para cada término:

$$q^a h^b A_0{}^c \rho^d g^e$$

y las dimensiones:

$$[L^3\theta^{-1}]^a[L]^b[L^2]^c[ML^{-3}]^d[L\theta^{-2}]^e = L^{3a+b+2c-3d+e}M^d\theta^{-a-2e}$$

Para tener dimensiones independientes se requiere que los exponentes de L, M, y θ sean cero:

$$\begin{aligned} 3a + b + 2c - 3d + e &= 0 \\ d &= 0 \\ -a - 2e &= 0 \end{aligned}$$

Se observa inmediatamente que dado que $d = 0$ la densidad no puede ser un factor en el flujo volumétrico. Al eliminar e de las dos ecuaciones restantes se tiene:

$$\tfrac{5}{2}a + b + 2c = 0$$

Esta es una ecuación con *tres* incógnitas, de tal manera, que se puede resolver solamente para una en términos de las otras dos. Despejando b,

$$b = -2c - \tfrac{5}{2}a$$

y se obtiene el término como:

$$q^a h^{-2c-5a/2} A_0{}^c g^{-a/2} = \left[\frac{q}{g^{1/2}h^{5/2}}\right]^a \left[\frac{A_0}{h^2}\right]^c$$

Note que se obtienen *dos* grupos adimensionales:

$$N_1 = \frac{q}{g^{1/2}h^{5/2}}, \qquad N_2 = \frac{A_0}{h^2}$$

De esta manera, la ecuación constitutiva es una ecuación que relaciona a las dos cantidades N_1 y N_2. Si se despeja N_1 se obtiene en función de N_2

$$N_1 = f(N_2)$$

$$\frac{q}{g^{1/2}h^{5/2}} = f\left(\frac{A_0}{h^2}\right)$$

$$q = [gh^5]^{1/2} f\left(\frac{A_0}{h^2}\right) \tag{3.15}$$

La diferencia entre este resultado y el obtenido en el ejemplo 3.4, estriba en el valor de G para las variables escogidas. En el análisis previo la elección de las variables condujo a $G = 1$, de tal manera que fue necesario buscar experimentalmente un solo número. Aquí para $G = 2$ se necesita una función.

Finalmente antes de pasar a otro problema, se harán algunos comentarios útiles sobre la planeación de experimentos. Observe que en la ecuación 3.15 se requieren experimentos para encontrar la forma de la función $f(A_0/h^2)$. Por supuesto, se podría fijar A_0 y hacer variar h como se hizo anteriormente, pero el análisis podría resultar demasiado largo. Es más fácil para análisis subsecuentes *fijar h* (sumando el líquido a la velocidad a que sale), y medir q para varios valores de A_0, aunque el experimento real podría ser también demasiado largo. Por supuesto se encuentra que

$$q = \text{constante} \times A_0 \text{ a } h \text{ fija}$$

o

$$f\left(\frac{A_0}{h^2}\right) = C\frac{A_0}{h^2}$$

$$q = CA_0\sqrt{gh}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo previamente.

Ejemplo 3.7 Velocidades de elevación de burbuja.

Numerosos procesos como el tratamiento de aguas de desperdicio del ejemplo 1.2, requieren la interacción de un gas y una fase líquida. A menudo, la interacción se realiza por la entrada de gas a través del líquido. El contacto depende entonces del tiempo requerido para la elevación de la burbuja a través del líquido, o simplemente, de la velocidad de elevación del gas. Para obtener información sobre la velocidad de elevación se puede utilizar el análisis dimensional.

Puede esperarse que la velocidad de elevación u, dependa del tamaño de la burbuja medida por el diámetro, D; las densidades del líquido y del gas ρ_L, y ρ_g, respectivamente; y la aceleración causada por la gravedad, g. Además, dependerá de las viscosidades del líquido y del gas, μ_L y μ_g. Recuerde que la viscosidad en unidades lb_m/ft seg, es una medida de la resistencia al flujo de un fluido. Por tanto, un gas tiene generalmente una viscosidad mucho más baja que la de un líquido, y el agua es mucho menos viscosa que la glicerina. Las variables y las dimensiones son:

$$u \; [=] \; L\theta^{-1}$$

$$D\ [=]\ L$$
$$\rho_L\ [=]\ ML^{-3}$$
$$\rho_g\ [=]\ ML^{-3}$$
$$g\ [=]\ L\theta^{-2}$$
$$\mu_L\ [=]\ ML^{-1}\theta^{-1}$$
$$\mu_g\ [=]\ ML^{-1}\theta^{-1}$$

Se tienen siete variables y tres dimensiones y, por lo tanto, cuatro grupos adimensionales. Al revisar es evidente que los dos grupos serán las relaciones de densidad y viscosidad ρ_g/ρ_L y μ_g/μ_L. Estas relaciones no serán diferentes de cero. Debe hacerse una consideración práctica al juzgar que las propiedades del gas son probablemente mucho menos importantes que las del líquido. De esta manera, se elimina la contribución de ρ_g y μ_g y se consideran solamente las cinco variables. Con $\mathscr{V} = 5$, $\mathscr{D} = 3, G = 2$, de tal manera, que se tienen dos grupos adimensionales.

Un término de la ecuación adimensional es de la forma:

$$u^{\alpha} D^{\beta} \rho_L{}^{\gamma} g^{\delta} \mu_L{}^{\varepsilon}$$

con las dimensiones:

$$[L\theta^{-1}]^{\alpha}[L]^{\beta}[ML^{-3}]^{\gamma}[L\theta^{-2}]^{\delta}[ML^{-1}\theta^{-1}]^{\varepsilon} = L^{\alpha+\beta-3\gamma+\delta-\varepsilon}M^{\gamma+\varepsilon}\theta^{-\alpha-2\delta-\varepsilon}$$

La condición de la dependencia adimensional son los exponentes que desaparecen de cada dimensión:

$$\alpha + \beta - 3\gamma + \delta - \varepsilon = 0$$
$$\gamma + \varepsilon = 0$$
$$-\alpha - 2\delta - \varepsilon = 0$$

Despejando en función de γ y δ se obtienen:

$$\alpha = -2\delta + \gamma$$
$$\beta = \gamma + \delta$$
$$\varepsilon = -\gamma$$

y la forma clásica es:

$$u^{-2\delta+\gamma} D^{\gamma+\delta} \rho_L{}^{\gamma} g^{\delta} \mu_L^{-\gamma} = \left[\frac{u^2}{gD}\right]^{-\delta} \left[\frac{Du\rho_L}{\mu_L}\right]^{\gamma}$$

Estos *dos* grupos adimensionales aparecen frecuentemente, y tienen nombres especiales:

$$\text{número de Reynolds: } \quad N_{Re} = \frac{Du\rho_L}{\mu_L}$$

$$\text{número de Froude: } \quad N_{Fr} = \frac{u^2}{gD}$$

En principio, la única ecuación adimensional puede resolverse para el número de Froude en términos del número de Reynolds:

$$N_{Fr} = f(N_{Re})$$

o

$$\frac{u^2}{gD} = f\left(\frac{Du\rho_L}{\mu_L}\right)$$

Se debe encontrar la función $f(N_{Re})$ efectuando experimentos para diferentes valores del número de Reynolds.

Cuando el líquido tiene baja viscosidad y su resistencia al movimiento es menor, se puede esperar que μ_L desempeñe una función poco importante. Esto es, para un valor mayor N_{Re} (valor menor de μ_L) se puede esperar que f se aproxime a un valor constante, y que la velocidad de elevación satisfaga la relación:

$$u = C_2\sqrt{gD}$$

La figura 3.10 muestra los datos del aire en agua graficados sobre coordenadas logarítmicas como número de Froude y número de Reynolds. Para $N_{Re} > 3000$ se observa que el número de Froude se aproxima indudablemente a una constante. Además a valores menores del N_{Re} la relación tiene una pendiente que se aproxima a la unidad en las coordenadas logarítmicas, o

$$N_{Fr} = C_1 N_{Re}, \qquad N_{Re} < 500$$

$$u = C_1 \frac{gD^2\rho_L}{\mu_L}$$

Los valores experimentales de C_1 y C_2 son, respectivamente, 0.019 y 0.5.

Aunque los datos presentados son para el agua, la dependencia funcional del número de Froude respecto al número de Reynolds se aplicará para cualquier sistema gas-líquido donde las relaciones densidad y viscosidad son menores. Después de todo, el análisis dimensional no especifica la presencia de agua. Los datos son más limitados para otros materiales porque se espera poder aplicar la misma dependencia.

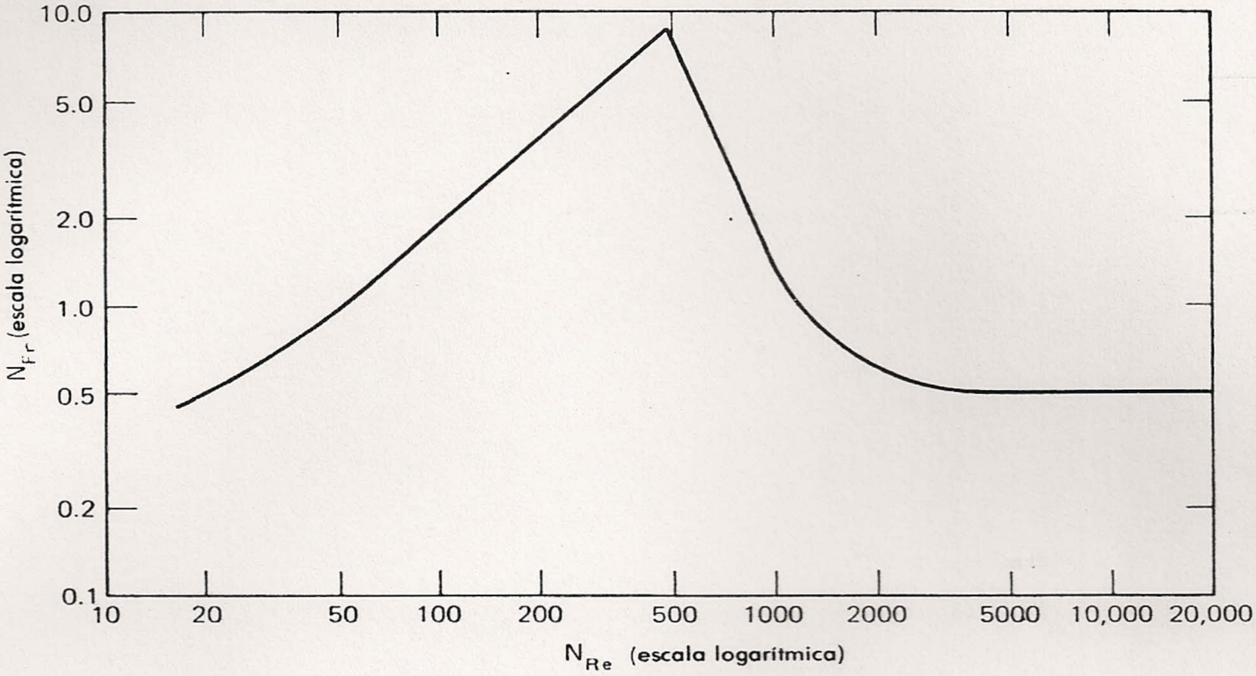

FIGURA 3.10 Número de Froude, u^2/gD, y el número de Reynolds, $Du\rho_L/\mu_L$, para burbujas de aire que se elevan en agua. Algunos datos para otros líquidos se encuentran sobre la misma curva.

3.5.4 Observaciones finales

Es conveniente hacer algunas observaciones finales sobre el uso del análisis dimensional. Las variables que deben aparecer en la relación final deben ser las estrictamente necesarias. Si hay pocas, se obtendrá un resultado incorrecto, si hay demasiadas resultará una complejidad innecesaria. Además, es necesario observar que las manipulaciones formales que se han efectuado son en realidad innecesarias en muchas situaciones, siempre y cuando se mantenga como componente el número adecuado de grupos (variables con menores dimensiones).

Para ilustrar esto último, considere otra vez el problema del orificio, con las variables:

$$q\ [=]\ L^3\theta^{-1}$$

$$\Delta p\ [=]\ FL^{-2}$$

$$\rho\ [=]\ ML^{-3}$$

$$A_0\ [=]\ L^2$$

$$g_c\ [=]\ MF^{-1}L\theta^{-2}$$

Es evidente, que g_c y Δp deben estar juntas ya que son las únicas variables que comprenden a F. Además, sólo g_c y ρ contienen a M, de tal manera, que deben estar en relación entre sí. De esta manera, puede observarse inmediatamente que una combinación necesaria es:

$$\frac{g_c \Delta p}{\rho} [=] \frac{M}{F} \frac{L}{\theta^2} \cdot \frac{F}{L^2} \cdot \frac{L^3}{M} = \frac{L^2}{\theta^2}$$

El único tiempo remanente se encuentra en q, que debe entrar como q^{-2} para suprimir θ^2 que ya existe ahí:

$$\frac{g_c \Delta p}{q^2 \rho} [=] \frac{L^2}{\theta^2} \cdot \frac{\theta^2}{L^6} = \frac{1}{L^4}$$

Por último, se necesita A_0:

$$\frac{A_0^2 g_c \Delta p}{q^2 \rho} [=] \frac{L^4}{L^4} = \text{adimensional}$$

Solamente podrá existir un grupo (cinco variables, cuatro dimensiones) de tal manera que:

$$\frac{A_0^2 g_c \Delta p}{q^2 \rho} = \text{constante}$$

que es por supuesto el mismo resultado obtenido anteriormente. Debe tenerse cuidado con este enfoque que generalmente es cierto para métodos con simplificaciones, ya que si se hace en forma apropiada es más rápido que los enfoques más formales.

Finalmente, note que las observaciones que se han hecho en relación a las dimensiones para efectuar el análisis dimensional, se agrupan a menudo, con el nombre de *Teorema Pi de Buckingham.*

3.6 CONCLUSIONES

El desarrollo de la habilidad para escribir las descripciones matemáticas depende de la comprensión total de la estructura lógica del proceso del análisis. Esto se resume en la secuencia de figuras que conduce a la figura 3.8 que forman la base para todo lo que se trata en este libro. Comprenda la idea de un volumen de control, su uso en la aplicación de un principio de conservación y la influencia que la selección de un volumen de control tiene sobre el número de variables independientes. Observe que sólo existen cuatro variables independientes y tres variables dependientes fundamentales de posible interés en los problemas de ingeniería y química, y que la mayoría de los casos que se encuentran usualmente, son aquellos en los que la única variable independiente es el tiempo o una dirección espacial. Revise cuidadosamente el importante papel de la ecuación básica.

El análisis dimensional se introduce en este capítulo por la importancia que revisten las dimensiones en cada etapa del proceso del análisis. La comprobación de la consistencia dimensional es una herramienta extremadamente útil para localizar errores, y no debe sobreestimarse el valor que tiene el análisis dimensional como guía para la experimentación y la formulación de relaciones básicas. Note cómo el tratamiento del problema del drenado del tanque en la sección 3.4 conduce inmediatamente a $n = 1/2$ en la ecuación $q = kh^n$, en vez de buscar otros valores para n entre cero y uno, y cómo la constante k obtenida de un experimento puede expresarse en función de variables que caracterizan al orificio. Puede ser útil utilizar al estudio sobre análisis dimensional abordado en la sección 2 de *Chemical Engineers' Handbook* y las demás bibliografías que menciona:

3.1 J. H. Perry, *Chemical Engineers' Handbook*, 4a. Ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1963.

Vea también:

3.2 J.W. Mullin, "SI Units in Chemical Engineering" *AIChE Journal*, 18 222 (1972)

3.7 PROBLEMAS

3.1 La velocidad de flujo volumétrico q, es una cantidad muy usada en diversas unidades de uso común. Calcule los factores de conversión númerica que, al ser multiplicados por un valor de q en ft^3/min, produzcan el valor correcto de q con las siguientes unidades:

(a) $\frac{cm^3}{hora}$

(b) $\frac{m^3}{seg}$

(c) $\frac{ft^3}{hora}$

(d) $\frac{gal}{min}$

(e) $\frac{litros}{seg}$

(f) $\frac{qt}{hr}$

3.2 Calcule para un líquido con densidad 1.00 g/cm³ y peso molecular de 18.0, el factor de conversión númerica que, al multiplicarse por un valor de q en ft^3/min, produzca el valor correcto para la velocidad de flujo de masa en las siguientes unidades:

(a) $\frac{lb_m}{hora}$

(b) $\frac{g}{seg}$

(d) $\frac{kg}{hora}$

(e) $\frac{tons}{día}$

(f) $\frac{g\text{-moles}}{hora}$

(g) $\frac{lb\text{-moles}}{seg}$

(c) $\frac{lb_m}{\text{año}}$ (h) $\frac{\text{lb-moles}}{\text{año}}$

3.3 La concentración de los componentes en una mezcla se expresa con las dimensiones ML^{-3}. Expresando el peso molecular como M_w, calcule el factor de conversión que, al multiplicarse por una concentración en lb_m/ft^3, produzca el valor correcto de la concentración en las siguientes unidades:

(a) $\frac{\text{lb-moles}}{ft^3}$ (d) $\frac{lb_m}{\text{gal}}$ (g) $\frac{g}{\text{litro}}$

(b) $\frac{\text{g-moles}}{ft^3}$ (e) $\frac{g}{cm^3}$ (h) $\frac{\text{g-moles}}{cm^3}$

(c) $\frac{\text{g-moles}}{\text{litro}}$ (f) $\frac{kg}{m^3}$ (i) $\frac{\text{lb-moles}}{\text{gal}}$

3.4 Se utiliza un tanque esférico de radio 5 ft como tanque de alimentación para una unidad de proceso intermitente. La cantidad correcta de materia prima es alimentada de este tanque al reactor por un operario que tiene una gráfica que indica la masa del líquido como una función de la altura. El operario mide el nivel del líquido antes de sacar el material y después, cuando ya inyectó la cantidad correcta. Trace la gráfica que necesita el operario si va a utilizar en el tanque metanol líquido, etanol y butanol a 20°C.

3.5 En el capítulo 5 se calcula la constante específica de velocidad de reacción, k, para la reacción química entre ácido sulfúrico y sulfato de dietilo en una solución acuosa. Dicha constante es igual a 6.05×10^{-4} litros /g-mol min. Encuentre su valor en las siguientes unidades:

(a) $\frac{ft^3}{\text{lb-mol min}}$ (d) $\frac{\text{gal}}{\text{lb-mol min}}$

(b) $\frac{cm^3}{\text{g-mol hr}}$ (e) $\frac{m^3}{\text{g-mol seg}}$

(c) $\frac{cm^3}{\text{g-mol min}}$ (f) $\frac{\text{qt}}{\text{lb-mol seg}}$

3.6 ¿Qué temperatura tiene el mismo valor numérico en °F y °C?

3.7 El tiempo de permanencia en un recipiente se define como el volumen dividido entre la descarga volumétrica. Calcule en minutos el tiempo de permanencia, θ, para los siguientes casos:

Volumen	Flujo volumétrico de agua
10,000 litros	3 gal/min
1,000 gal	10^3 cm^3/seg
500 ft^3	2litros/min
10,000 ft^3	5000 gal/hr

3.8 La presión p es una fuerza por unidad de área. Al nivel del mar el aire ejerce una presión de 14.7 $lb_f/in.^2$ Calcule esta cantidad en las siguientes unidades.

(a) n/m^2
(b) d/cm^2
(c) lb_f/ft^2
(d) $lbl/in.^2$
(e) n/cm^2
(f) d/m^2

3.9 El trabajo o energía tiene las siguientes dimensiones. FL o $ML^2\theta^{-2}$. Encuentre el factor de conversión que, al multiplicarse por una cantidad medida en lb_f ft, arroje el valor correcto en las siguientes unidades.

(a) g $cm^2 seg^{-2}$ (ergs)
(b) kg $m^2 seg^{-2}$ (joules)
(c) lb_m $ft^2 seg^{-2}$
(d) calorías
(e) BTU

3.10 La constante de los gases, R, tiene un valor de 1545 ft lb_f/lb- mol°R. Calcule R en las siguientes unidades.

(a) atm ft^3/lb-mol °R (nota: 1 atm = 14.7 lb_f/in^2)

(b) joules/g-mol °K

(c) BTU/lb-mol °R (nota: 1 BTU = 778 ft lb_f)

3.11 Las siguientes propiedades del agua líquida se dan en unidades del sistema cgs. Convierta a las unidades del sistema inglés de ingeniería (lb_m, ft, BTU).

(a) viscosidad $\mu = 0.01$ g/cm seg

(b) capacidad calorífica $\underline{c} = 1$ cal/g °C (1 cal = 4.186 Joule)

(c) conductividad térmica $k = 0.0014$ cal/cm seg °C

3.12 El número de Prandtl se define como

$$N_{Pr} = \underline{c}\mu/k$$

Demuestre que es adimensional. Con los valores de $\underline{c}$, μ, y k tomados de un manual, calcule su valor para el agua líquida, glicerina líquida, metanol y los siguientes gases a una atmósfera y a temperatura ambiente: oxígeno, etileno, amoniaco, dióxido de carbono, hidrógeno. ¿Qué conclusiones generales pueden derivarse?

3.13 En el problema del vaciado del tanque suponga (erróneamente) que las variables son q (ft^3/min), h (ft), g_c ($lb_m ft/lb_f seg^2$), Δp (lb_f/ft^2), y ρ (lb_m/ft^3). ¿Cómo depende q de las otras variables?

3.14 Una masa de rocas M (lb_m) cae en el vacío con la aceleración de la gravedad g (ft/seg^2). Exprese la distancia recorrida S(ft) al caer las rocas en el tiempo t (seg) en función de M, g, y t. Compare el resultado obtenido en física elemental.

3.15 Las variables pertinentes al describir el comportamiento de un gas se toman como p (lb_f/ft^2), V (ft^3), n (mol), y RT (ft lb_f/mol). ¿Cuál es la relación existente entre las variables?

3.16 En el problema 3.15, suponga que la presión también depende del volumen por mol ocupado por las moléculas V_0 (ft^3/mol). ¿Cuál es la relación resultante, expresada como una corrección para el gas ideal? Compare con el caso especial:

$$p(V - nV_0) = nRT$$

donde se formula la siguiente hipótesis: el volumen importante es el volumen no ocupado.

3.17 Cuando un líquido fluye en una tubería, la velocidad de flujo volumétrico Q (ft^3/min) depende de la densidad ρ (lb_m/ft^3), el radio de la tubería R(ft), la viscosidad μ (lb_m/ft seg) y el gradiente de presión, o el cambio de presión por longitud, $\Delta p/L$ (lb_f/ft^2/ft). ¿Cómo depende Q de las variables del problema? (Note que aparecen lb_f y lb_m!) El experimento se efectúa con flujo bajo y manteniendo constantes ρ, μ, y R. Se encuentra que Q varía linealmente con $\Delta p/L$. ¿Cómo dependerá Q de R?

Suponer que Q es independiente de μ proporciona una aproximación muy poco precisa del comportamiento de un flujo a alta velocidad. ¿Cómo dependerá Q de R y de $\Delta p/L$?

3.18 Repita el ejemplo 3.6 incluyendo como una variable, la viscosidad, $\mu(LM^{-1}\theta^{-1})$.